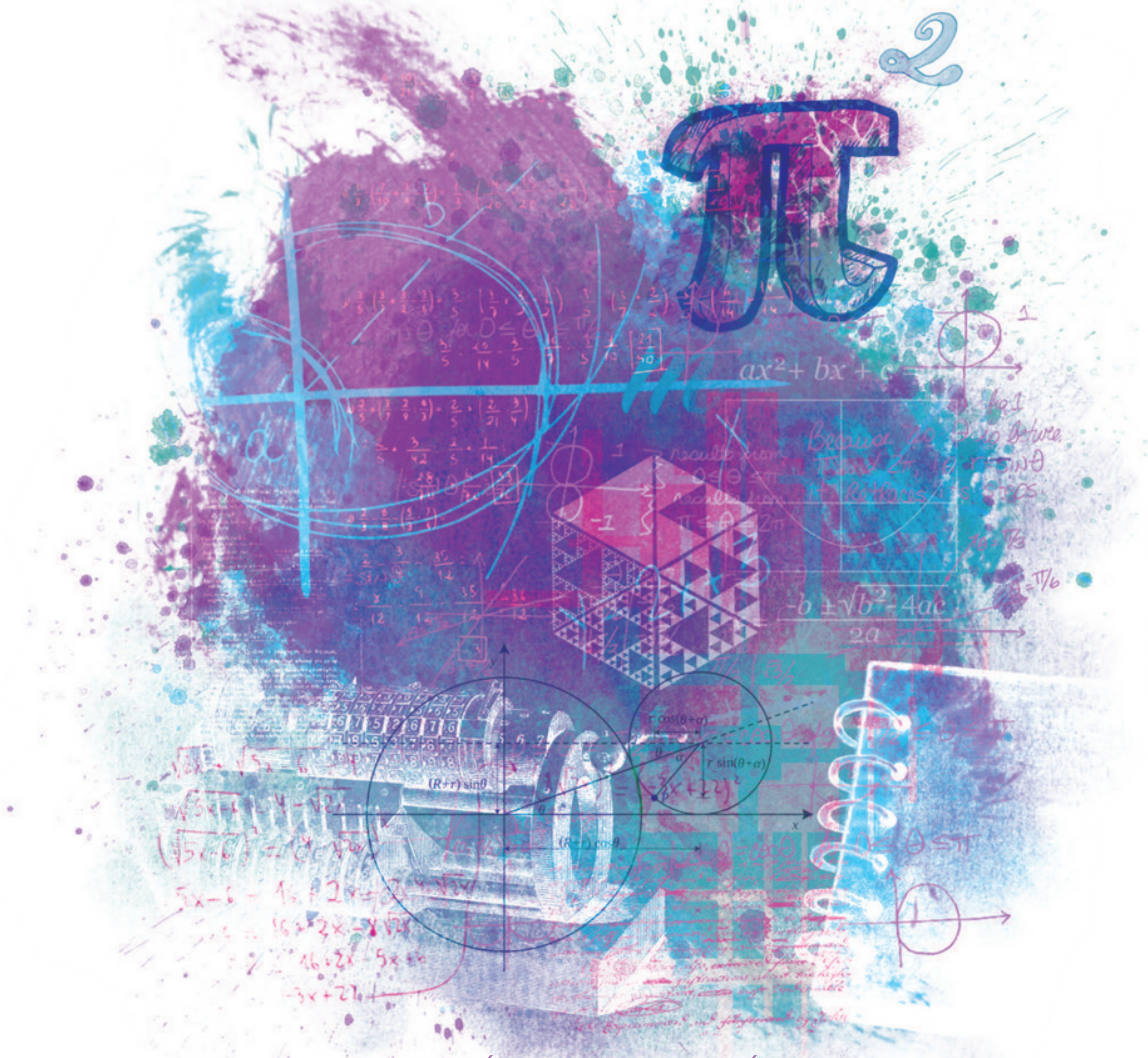
MATEMÁTICA

MANUAL DE PREPARACIÓN



PRUEBA DE ADMISIÓN A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

PSU LIBROS

MATEMÁTICA

MANUAL DE PREPARACIÓN

PRUEBA DE ADMISIÓN A LA EDUCACIÓN SUPERIOR

PSU LIBROS

MATEMÁTICA

MANUAL DE PREPARACIÓN

ÍNDICE

MATEMÁTICA

MANUAL DE PREPARACIÓN

ÍNDICE

En tiempos recientes, el proceso de ingreso universitario en nuestro país ha experimentado cambios significativos, planteando desafíos considerables tanto para profesores como para estudiantes. Estas modificaciones, que incluyen la eliminación de ciertos contenidos y la incorporación de nuevas materias, han hecho imperativo el desarrollo de material didáctico actualizado, especialmente para la nueva Prueba de Acceso a la Educación Superior (PAES).

Con el objetivo de satisfacer esta necesidad, presentamos este manual de matemática para la PAES. Diseñado meticulosamente, este libro busca fortalecer todas las habilidades matemáticas esenciales para enfrentar un examen que cumpla con las expectativas de los estudiantes más destacados del país. Nuestro enfoque combina teoría y práctica, proporcionando una amplia gama de ejercicios que consolidan los conocimientos adquiridos en cada sección teórica.

Somos conscientes de que la resolución de problemas puede presentar obstáculos para los estudiantes. Por ello, al concluir cada capítulo, ofrecemos un conjunto de preguntas de opción múltiple similares a las que encontrarán en la PAES, permitiendo así una práctica efectiva. Además, para facilitar el proceso de aprendizaje, al final de cada capítulo se incluyen las respuestas correctas a estas preguntas.

Este manual está estructurado en 21 capítulos, basados en el temario DEMRE. Cada capítulo cuenta con una serie de ejercicios organizados por contenidos, brindando al postulante una experiencia de práctica cercana a la realidad de la PAES.

Nuestra esperanza es que este recurso se convierta en una herramienta valiosa para los futuros estudiantes universitarios, brindándoles la confianza y preparación necesarias para enfrentar el examen con éxito. Ahora, te invitamos a sumergirte en este manual y comenzar tu preparación a tu ritmo para la PAES en matemática. ¡Vamos con todo!

Equipo de edición

PSU Libros

NÚMEROS RACIONALES

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3: NÚMEROS RACIONALES

1. Definición y representación gráfica

En toda fracción existen dos términos:

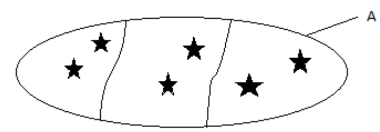
El denominador, que indica las partes iguales en que se ha dividido el entero.

El numerador, que indica el número de partes iguales que se toman del entero.

$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{numerador}{denominador}$

Fracción de un número. El conjunto **A** del recuadro tiene #6 y se ha dividido en **3** subconjuntos equivalentes. Cada subconjunto es $\frac{1}{3}$ del conjunto **A** y cada subconjunto tiene 2 elementos.

Luego $\frac{1}{3}$ $\boldsymbol{de\ 6\ es\ 2}$.



Ahora determinamos la fracción de un número sin la ayuda de conjuntos.

1° se divide el entero 15 por el denominador 5 de la fracción.

2° se multiplica el cuociente obtenido por el numerador 2 de la fracción.

$$\frac{2}{5} de\ 15$$
$$15:5 = 3$$
$$3 \cdot 2 = 6$$
$$Luego\ \frac{2}{5}\ de\ 15 = 6$$
$$Equivale\ a\ \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Entonces: $\frac{2}{5}\ de\ 15 = 6$

$\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$

Observa que la palabra **de** se reemplaza por el signo ·

Ejercicios 1

Resuelve

i) $\frac{1}{2}\ de\ 8$	ix)
ii) $\frac{3}{4}\ de\ 12$	x) $\frac{1}{3}\ de\ 15$
iii) $\frac{1}{6}\ de\ 18$	xi) $\frac{5}{6}\ de\ 18$
iv) $\frac{3}{5}\ de\ 15$	xii) ¿ $Cuántos\ días\ son\ \frac{3}{5}\ de\ un\ mes\ de\ 30\ dias$?
v) $\frac{1}{4}\ de\ 12$	xiii) ¿ $Cuántos\ meses\ son\ \frac{2}{3}\ de\ un\ año$?
vi) $\frac{2}{3}\ de\ 15$	xiv) ¿ $Cuántos\ horas\ son\ \frac{5}{6}\ de\ un\ día$?
vii) $\frac{3}{8}\ de\ 24$	xv) $La\ mitad\ de\ un\ curso\ son\ 10\ alumnos$. ¿ $Cuántos\ alumnos\ corresponden\ a\ la\ cuarta\ parte\ del\ curso$?
viii) $\frac{4}{7}\ de\ 21$	

Ejercicios 2

Calcula la fracción del número dado.

i)	$\frac{4}{5}\ de\ 25 =$	vi)	$\frac{5}{12}\ de\ 48 =$	xi)	$\frac{3}{9} \cdot 81 =$
ii)	$\frac{5}{8}\ de\ 48 =$	vii)	$\frac{5}{6} \cdot\ 30 =$	xii)	$\frac{3}{5} \cdot 40 =$
iii)	$\frac{7}{10}\ de\ 30 =$	viii)	$\frac{7}{9} \cdot\ 108 =$	xiii)	$\frac{7}{12} \cdot 36 =$
iv)	$\frac{2}{3}\ de\ 18 =$	ix)	$\frac{4}{15} \cdot\ 150 =$	xiv)	$\frac{5}{9} \cdot 81 =$
v)	$\frac{1}{2}\ de\ 36 =$	x)	$\frac{2}{5} \cdot 40 =$	xv)	$\frac{7}{4} \cdot 3$

La **fracción** $\frac{a}{b}$ es el cuociente entre $a \wedge b$ con$a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$

Fracción $\frac{a}{b}$
Cuociente $a : b$
$a \in \mathbb{Z}, b\ \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

Ejemplo:

- $\frac{10}{5} = 10 : 5 = 2$
- $\frac{-8}{2} = -8 : 2 = -4$

Aplicando la regla de los signos para un cuociente, vemos que **una fracciones positiva** si el numerador y el denominador son

del mismo signo.

Fracción positiva
$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Ejemplo:

- $\frac{+3}{+5} = \frac{3}{5}$
- $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

Ejercicios 3

Indica si las siguientes fracciones son positivas o negativas.

i)	$\frac{-4}{8}$	iv)	$\frac{4}{-7}$	vii)	$\frac{-5}{9}$	x)	$\frac{-7}{3}$
ii)	$\frac{5}{6}$	v)	$\frac{-8}{9}$	viii)	$\frac{4}{-7}$		
iii)	$\frac{-6}{-5}$	vi)	$\frac{-8}{11}$	ix)	$\frac{5}{3}$		

Ejericicios 4

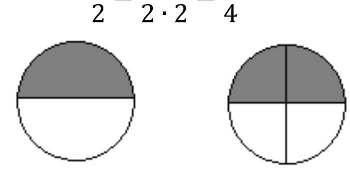
Indica en los siguientes cuocientes cuáles pertenecen ($\in$) y cuáles no pertenecen ($\notin$) a $\mathbb{Z}$

i) $\frac{-6}{-2}$ _____ $\mathbb{Z}$	ii)) $\frac{-15}{4}$ _____ $\mathbb{Z}$	iii)) $\frac{-8}{7}$ _____ $\mathbb{Z}$	iv)) $\frac{0}{-6}$ _____ $\mathbb{Z}$
v) $\frac{12}{13}$ _____ $\mathbb{Z}$	vi)) $\frac{0}{4}$ _____ $\mathbb{Z}_0^+$	vii)) $\frac{-3}{3}$ _____ $\mathbb{Z}$	viii))- $\frac{15}{15}$ _____ $\mathbb{Z}$

Amplificar una fracción es multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número entero, distinto de cero.

El valor de la fracción no cambia.

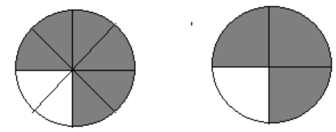
$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$$



Ejemplo:

- $\mathbf{\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot -2}{2 \cdot -2} = \frac{-2}{-4}} = \frac{\mathbf{2}}{4}$
- $\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12}$

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$



Simplificar una fracción es dividir el numerador y el denominador por el mismo número entero, distinto de cero. **El valor de la fracción no cambia.**

Ejemplo:

- $\frac{-18}{12} = \frac{-18:2}{12:2} = \frac{-9}{6}$
- $\frac{-9}{6} = \frac{-9:3}{6:3} = \frac{-3}{2}$

Si al simplificar una fracción dividimos el numerador y el denominador por su máximo común divisor (MCD), obtenemos una fracción que no se puede simplificar nuevamente, llamada **fracción irreductible**.

Ejemplo:

- $\frac{-18}{12} MCD\ (12{,}18) = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{-18:6}{12:6} = \frac{-3}{2} \qquad \textit{fracción irreductible}$

Ejercicios 5

1. Amplifica las siguientes fracciones por – **5**.

i) $\frac{3}{5}=$ ii) $\frac{5}{8}=$ iii) $\frac{-3}{7}=$ iv) $\frac{-5}{8}=$

2. Simplifica las siguientes fracciones por $-\mathbf{3}$.

i) $\frac{12}{18}=$ ii) $\frac{-15}{3}=$ iii) $\frac{21}{-18}=$ iv) $\frac{-30}{45}=$

3. Encuentra la fracción irreductible correspondiente a cada fracción.

i)	$\frac{8}{12}=$	iv)	$\frac{-30}{36}=$	vii)	$\frac{-84}{124}=$
ii)	$\frac{-4}{8}=$	v)	$\frac{14}{42}=$	viii)	$\frac{36}{270}=$
iii)	$\frac{16}{18}=$	vi)	$\frac{72}{48}=$	ix)	$\frac{-56}{90}=$

4. Indica qué fracción irreductible representa cada una de las frases. (Considera los meses de **30** días).

1. 15 días de un mes.
2. 12 horas de un día.
3. 4 meses de un año.
4. 50 minutos de una hora.

5. 30 segundos de una hora.

Fracciones equivalentes son aquellas que nombran al número fraccionario y se obtiene al simplificar o simplificar una fracción.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}\ ampliicando\ por\ m \neq 0$$

Fracciones equivalentes

$$\frac{pq}{rq} = \frac{pq : q}{rq : q} = \frac{p}{r}\ simplificando\ por\ q \neq 0$$

Ejemplo:

- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}\ porque\ \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$
- $\frac{-12}{18} = \frac{-2}{3}\ porque\ \frac{-12:6}{18:6} = \frac{-2}{3}$

¿Qué sucede si en las fracciones del ejemplo anterior multiplicamos sus términos cruzados?

Ejemplo:

- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \rightarrow 4 = 4$
- $\frac{-12}{18} = \frac{-2}{3} \rightarrow -12 \cdot 3 = 18 \cdot -2 \rightarrow -36 = -36$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot b = b \cdot c$$

Vemos que dos fracciones son equivalentes si los **productos cruzados** de sus términos son iguales.

Ejercicios 6

Para cada par de fracciones, indica si son equivalentes o no completando la afirmación con los símbolos = ó ≠.

i) $\frac{3}{4}$ ______ $\frac{12}{16}$

ii) $\frac{-2}{6}$ ______ $\frac{10}{-30}$

iii) $\frac{18}{-15}$ ______ $\frac{6}{5}$

iv) $\frac{-4}{12}$ ______ $\frac{3}{9}$

Al simplificar una fracción por -1, **cambian los signos de los dos términos**, obteniéndose una fracción equivalente a la primitiva.

$$\frac{+a}{-b} = \frac{+a \cdot -1}{-b \cdot -1} = \frac{-a}{b}$$

Ejemplo:

- $\frac{+2}{-3} = \frac{+2 \cdot -1}{-3 \cdot -1} = \frac{-2}{+3}$

Ejercicios 7

Transforma cada fracción en otra equivalente con denominador positivo.

i) $\frac{3}{-5} =$

ii) $\frac{7}{-3} =$

iii) $\frac{-2}{-9} =$

iv) $\frac{-2}{-7} =$

v) $\frac{5}{-2} =$

vi) $\frac{5}{-8} =$

vii) $\frac{1}{-2} =$

Si amplificamos una fracción sucesivamente por los números naturales obtenemos un conjunto de fracciones equivalentes llamado **clase de equivalencia**.
Cada una de estas clases se llama número racional.

$$\left[\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1}, \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}, \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}, \dots\right]$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{2}, \dots\right]$$

Clase de equivalencia

La fracción irreductible de cada se considera el **representante del número racional.**

Un número racional está formado por una fracción y todos sus equivalentes.

$$\frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\right\}$$

Número racional $\frac{1}{2}$

Cada fracción pertenece a un número racional y sólo a uno.

Todos los elementos de un número racional representan el **mismo punto en la recta numérica.**

La recta numérica y el conjunto $\mathbb{Q}$

-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+1$	$\frac{+3}{2}$
	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{2}{4}$		$\frac{+6}{4}$
	$\frac{-3}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{3}{6}$		$\frac{+9}{6}$

Conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es el que agrupa a todas las clases de equivalencia.

Todo número entero se puede expresar como **una fracción con denominador 1.** Entonces $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Si $a \in \mathbb{Z} \rightarrow a = \frac{a}{1}$

$$a = \left\{\frac{a}{1}, \frac{-2a}{2}, \frac{3a}{3}, \frac{4a}{4}, \dots\right\}$$

Número racional a

Ejemplo:

- El racional $3 = \left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \dots\right\}$
- El racional $-5 = \left\{\frac{-5}{1}, \frac{-10}{2}, \frac{-15}{3}, \dots\right\}$

Ejercicios 8

1. Escribe un conjunto de cinco fracciones equivalentes a:

i) $\frac{2}{3} = \{\dots$

ii) $\frac{-1}{2} = \{\dots$

iii) $\frac{0}{2} = \{\dots$

iv) $\frac{-2}{5} = \{\dots$

v) $\frac{-3}{5} = \{\dots$

vi) $\frac{-2}{3} = \{\dots$

2. Escribe el número racional

i) $\frac{4}{5} = \{\dots$

ii) $\frac{-1}{3} = \{\dots$

iii) $\frac{-2}{7} = \{\dots$

iv) $\frac{-5}{3} = \{\dots$

v) $4 = \{\dots$

vi) $-7 = \{\dots$

Racionales positivos son a1quellos que están representados por fracciones positivas.
El conjunto de números racionales positivos se designa con $\mathbb{Q}^+$**.**

$$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

Hemos visto que al amplificar una fracción por -1 cambian los signos del numerador y denominador obteniéndose una fracción equivalente a la anterior, por lo tanto, en adelante usaremos solamente denominadores positivos.

Toda fracción de denominador negativo la amplificaremos por -1.

Ejemplo:

- $\frac{3}{-5} = \frac{3 \cdot -1}{-5 \cdot -1} = \frac{-3}{5}$

- $\frac{-4}{-9} = \frac{-4 \cdot -1}{-9 \cdot -1} = \frac{4}{9}$

Racionales negativos son aquellos que están representados por fracciones negativas.
El conjunto de números racionales negativos se designa con $\mathbb{Q}^-$.

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^-$$
$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^-$$

El **racional cero** está formado por todas las fracciones que tienen el numerador cero.

$$0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \dots\right\}$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$ en los cuales el numerador $\boldsymbol{a}$ es un número entero y el denominador $\boldsymbol{b}$ es un número entero distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / \, a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

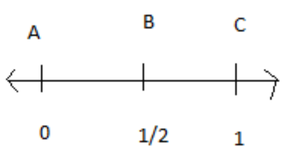
Ejercicio 9

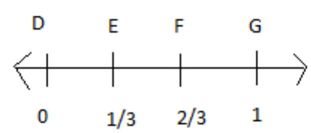
1. Completa cada ejercicio con el símbolo que corresponda ($\in, \notin, \subset, \supset, \not\subset$).

i) $\frac{3}{5}$ ____ $\mathbb{Q}^-$
ii) $\frac{3}{8}$ ____ $\mathbb{Q}^-$
iii) $\frac{-5}{6}$ ____ $\mathbb{Q}^-$
iv) $\frac{0}{5}$ ____ $\mathbb{Q}^-$
v) $\frac{-8}{7}$ ____ $\mathbb{Q}^-$
vi) -5 ____ $\mathbb{Q}^-$
vii) $\mathbb{Z}^+$ ____ $\mathbb{Q}^-$
viii) $\mathbb{Q}$ ____ $\mathbb{Z}^-$
ix) $\mathbb{N}$ ____ $\mathbb{Q}$
x) $\mathbb{Z}$ ____ $\mathbb{Q}$
xi) 0 ____ $\mathbb{Z}$
xii) $\{0\}$ ____ $\mathbb{Q}^-$

Para la representación gráfica de los números racionales elegimos como entero la longitud del segmento comprendida entre 0 y 1, y de acuerdo al denominador de la fracción representante dividimos dicho segmento en un número de partes iguales $(2, 3, 4, \dots)$.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$





$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{EG} = \frac{1}{3}\overline{DG}$$

2. Divide los intervalos de la recta numérica en 5 partes iguales y representa las fracciones que tienen denominador 5.

3. Respondiendo sí o no, indica en los siguientes pares de fracciones cuáles están representados por el mismo punto en la recta numérica.

i) $\frac{2}{5} \wedge \frac{10}{25}$
ii) $\frac{-1}{2} \wedge \frac{1}{-2}$
iii) $\frac{0}{2} \wedge \frac{0}{-2}$
iv) $\frac{-4}{3} \wedge \frac{4}{3}$
v) $\frac{-2}{3} \wedge \frac{2}{3}$
vi) $\frac{3}{8} \wedge \frac{30}{80}$
vii) $\frac{-5}{-4} \wedge \frac{5}{4}$
viii) $\frac{-18}{20} \wedge \frac{-6}{5}$

Ejercicios 21

Expresa los siguientes decimales infinitos períodos como fracción común irreductible.

i) $0,\overline{6} =$ ii) $0,\overline{03} =$ iii) $0,\overline{24} =$ iv) $0,\overline{123} =$

Para expresar un número decimal semiperiódico como fracción común el procedimiento es similar al anterior, pero el denominador estará formado por tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

Ejemplo:

El período tenía 1 cifra (8), entonces **un nueve** y el anteperíodo (62) dos cifras, por tanto, **dos ceros ⇒ 900**

Ejercicios 22

Expresa los siguientes decimales semiperiódicos como fracción común irreductible.

i)	$0{,}1\overline{6} =$	v)	$0{,}0\overline{03} =$	ix)	$0{,}1\overline{2} =$
ii)	$0{,}0\overline{5} =$	vi)	$0{,}00\overline{3} =$	x)	$3{,}24\overline{1} =$
iii)	$0{,}4\overline{26} =$	vii)	$1{,}0\overline{4} =$	xi)	$5{,}4\overline{2} =$
iv)	$0{,}32\overline{7} =$	viii)	$1{,}4\overline{26} =$	xii)	$1{,}00\overline{3} =$

Si tenemos un número decimal y agregamos ceros a la derecha de su última cifra significativa, obtenemos un número decimal equivalente.

Ejemplo:

$0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 \ldots$
0,12=0,120=0,12000…

- $0{,}07 = 0{,}070 = 0{,}0700 = 0{,}07000 = \cdots$
- $23 = 23{,}0 = 23{,}00 = 23{,}000 = \cdots$

Para establecer una ordenación entre números decimales podemos compararlos mediante el procedimiento descrito en el ejemplo siguiente:

Establecer una relación de orden entre: 15,2 ∧ 15,26

a) Se comparan sus partes enteras
Si son distintas, se puede establecer inmediatamente la relación como en los números naturales. Si son iguales, como en este caso: $15 = 15$, continuamos.

b) Se compara la primera cifra decimal.
15,2
15,26 $2 = 2$ *Como son iguales, debemos continuar*

c) Se compara la segunda cifra decimal.

$15{,}20 = 0$ → *completamos con ceros hasta igualar el número de cifras y poder comparar*

$15{,}26 = 6$

$6 > 0$ *por tanto,* $15{,}26 > 15{,}2$

¿Cómo compararías los decimales periódicos?

En los decimales negativos sucede lo contrario.

$-0{,}11 > -0{,}15$ *pues* $-1 > -5$

Repasa la relación de orden para los números negativos en $\mathbb{Z}$.

Respuestas

Respuestas 1

i. 4
ii. 9
iii. 3
iv. 9
v. 3
vi. 10
vii. 9
viii. 12
ix. 5
x. 15
xi. 18
xii. 8
xiii. 20
xiv. 2.5

Respuestas 2

i. 20
ii. 30
iii. 21
iv. 12
v. 18
vi. 20
vii. 25
viii. 84
ix. 40
x. 16
xi. 27
xii. 24
xiii. 21
xiv. 45
xv. 63

Respuestas 3

I. Negativa
II. Positiva
III. Positiva
IV. Negativa
V. Negativa
VI. Negativa
VII. Negativa
VIII. Negativa
IX. Positiva
X. Negativa

Respuestas 4

i) Perteneciente a $\mathbb{Z}$
ii) No perteneciente a $\mathbb{Z}$
iii) No perteneciente a $\mathbb{Z}$
iv) Perteneciente a $\mathbb{Z}$
v) No perteneciente a $\mathbb{Z}$
vi) Perteneciente a $\mathbb{Z}$
vii) Perteneciente a $\mathbb{Z}$
viii) Perteneciente a $\mathbb{Z}$

Respuestas 5

1.
Amplifica las siguientes fracciones por – **5**

i) $\frac{3}{5}=\frac{-15}{-25}=\frac{15}{25}$ ii) $\frac{5}{8}=\frac{-25}{-40}=\frac{25}{40}$ iii) $\frac{-3}{7}=\frac{15}{-21}=-\frac{15}{21}$ iv) $\frac{-5}{8}=\frac{25}{-40}=-\frac{25}{40}$

2.

Simplifica las siguientes fracciones por $\mathbf{-3}$.

i) $\frac{12}{18}=\frac{-4}{-6}=\frac{4}{6}$ ii) $\frac{-15}{3}=\frac{5}{-1}=-5$ iii) $\frac{21}{-18}=\frac{15}{-21}=-\frac{15}{21}$ iv) $\frac{-30}{45}=\frac{10}{-15}=-\frac{10}{15}$

3.

i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{1}{2}$ iii) $\frac{8}{9}$ iv) $-\frac{5}{6}$ v) $\frac{1}{3}$
vi) $\frac{3}{2}$ vii) $-\frac{21}{31}$ viii) $\frac{2}{15}$ ix) $-\frac{28}{45}$

4.

i) 15 días de un mes: $\frac{1}{2}$
ii) 12 horas de un día: $\frac{1}{2}$
iii) 4 meses de un año: $\frac{1}{3}$
iv) 50 minutos de una hora: $\frac{5}{6}$
v) 30 segundos de una hora: $\frac{1}{120}$

Respuestas 6

i) $=$ ii) $=$ iii) $=$ iv) $\neq$

Respuestas 7

i) $\frac{-3}{5}$ ii) $\frac{-7}{3}$ iii) $\frac{2}{9}$ iv) $\frac{-2}{-7}=\frac{2}{7}$
v) $\frac{5}{-2}$ vi) $\frac{-5}{8}$ vii) $\frac{-1}{2}$

Respuestas 8

1)
i. $\frac{2}{3}=\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{8}{12},\frac{10}{15},\frac{12}{18},\ldots\}$
ii. $-\frac{1}{2}=\{\frac{-1}{2},\frac{-2}{4},\frac{-3}{6},\frac{-4}{8},\frac{-5}{10},\frac{-6}{12},\ldots\}$
iii. $\frac{0}{2}=\{\frac{0}{2},\frac{0}{4},\frac{0}{6},\frac{0}{8},\frac{0}{10},\frac{0}{12},\ldots\}$
iv. $\frac{-2}{5}=\{\frac{-2}{5},\frac{-4}{10},\frac{-6}{15},\frac{-8}{20},\frac{-10}{25},\frac{-12}{30},\ldots\}$
v. $\frac{-3}{5}=\{\frac{-3}{5},\frac{-6}{10},\frac{-9}{15},\frac{-12}{20},\frac{-15}{25},\ldots\}$
vi. $\frac{-2}{3}=\{\frac{-2}{3},\frac{-4}{6},\frac{-6}{9},\frac{-8}{12},\frac{-10}{15},\ldots\}$

Ejercicios 9

1)

i) $\notin$
ii) $\notin$
iii) $\in$
iv) $\in$
v) $\in$
vi) $\in$
vii) $\not\subset$
viii) $\supset$
ix) $\subset$
x) $\subset$
xi) $\in$
xii) $\notin$

3)

1. Sí

Ejercicios de alternativas 2

1. El resultado de la expresión $\frac{8}{7} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{8}\right)$ es:

   A) $\frac{8}{10}$
   B) $\frac{8}{21}$
   C) $\frac{1}{35}$
   D) $\frac{1}{40}$

2. Una fracción con numerador y denominador positivo aumenta su valor si:

   I. El numerador aumenta.
   II. El denominador aumenta.
   III. El denominador disminuye

   A) Solo I
   B) Solo II
   C) Solo I y II
   D) Solo I y III.

3. En un curso de 40 estudiantes, los $\frac{5}{8}$ del total son niños. Si a mediados de un año ingresan al curso 5 niñas, ¿Cuál será la fracción respecto del total, que representa a las niñas del curso?

   A) $\frac{4}{9}$
   B) $\frac{2}{3}$
   C) $\frac{5}{9}$
   D) $\frac{1}{2}$

4. Una barra de aluminio mide 0.8 m. Por efecto de los cambios de temperatura, luego de 15 horas aumentó en una milésima parte su longitud. ¿Cuál será su medida?

   A) 0.81 m.
   B) 0.88 m.
   C) 0.801 m.
   D) 0.8008 m.

5. Si **n** es un numero entero negativo distinto de -1, ¿cuál de las siguientes fracciones es la menor?

A) $\frac{1}{n}$

B) $-\frac{n}{1}$

C) $-\frac{1}{n^4}$

D) $\frac{1}{2n}$

6. Si $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{5}$ y $c = \frac{25}{4}$, entonces, ¿ Cual(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera (s)?

I. $b \cdot c < a^2$

II. $(a \cdot b)^{-1} < c$

III. $\frac{b}{c} < a$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo II y III

7. En un Triángulo rectángulo isósceles, ambos ángulos interiores agudos disminuyen en un tercio su medida. Entonces la medida del tercer ángulo interior del triángulo resultante debe:

A) Disminuir a su tercera parte.

B) Aumentar en su tercera parte.

C) Disminuir en su dos tercias partes.

D) Aumentar en su dos tercias partes.

8. En un triángulo ABC, uno de sus ángulos interiores mide x, el segundo mide 30°más que la mitad del anterior y el tercer ángulo mide la tercera parte de x aumentado en 18°. ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el menor ángulo interior del triángulo ABC?

A) 72°

B) 24°

C) 30°

D) 42°

9. Un estanque tiene ocupada sus tres cuartas partes con agua. Si se le agregan 500 litros, el agua ocupa hasta los cinco sextos del estanque. ¿Cuál es su capacidad?

A) 6.000 litros.
B) 5.500 litros.
C) 4.500 litros.
D) 4.000 litros.

10. Un partido de futbol se desarrolla en dos tiempos de 45 minutos cada uno. ¿Qué fracción del tiempo que dura un partido queda cuando han transcurrido 15 minutos del segundo tiempo?

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$

11. En un grupo de personas, $\frac{1}{5}$ de ellas no tienen hijos, un tercio tiene mellizos y las 35 personas restantes tienen un solo hijo. ¿Cuántas personas forman el grupo?

A) 70.
B) 75.
C) 60.
D) 120.

12. En un curso, un día faltaron a clases $\frac{2}{9}$ de los estudiantes. Si ese día asistieron 35 estudiantes, ¿cuántos alumnos componen el curso?

A) 36 alumnos.
B) 38 alumnos.
C) 40 alumnos.
D) 45 alumnos.

13. ¿Qué precio tiene una mercadería si los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{5}$ de ella equivalen a $5.600?

A) $15.000.
B) $18.000.
C) $21.000.
D) $28.000.

14. Si se tienen 13 botellas de $\frac{3}{4}$ L, de las cuales 7 están llenas y 6 a la mitad. ¿Cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ L se necesitan para envasar la misma cantidad de litros?

Respuestas de ejercicios de alternativas 2

Nº de la pregunta	Alternativa correcta
1	C
2	D
3	A
4	D
5	A
6	D
7	B
8	C
9	A
10	D
11	B
12	D
13	C
14	D
15	A
16	D
17	D
18	B
19	C
20	A
21	D
22	D
23	D
24	A
25	C
26	B
27	C
28	E
29	D
30	B

FRACCIONES ALGEBRAICAS

CAPÍTULO 8

Se factorizan todos los elementos y se procede a efectuar la simplificación.

$$\frac{a^3-a}{2a^2+6a} : \frac{5a^2-5a}{2a+6} = \frac{a(a-1)(a+1)}{2a(a+3)} : \frac{5a(a-1)}{2(a+3)} = \frac{a(a-1)(a+1)(2)(a+3)}{(2a)(5a)(a-1)(a+3)} = \frac{a+1}{5a}$$

Ejemplo 30

Resuelve la siguiente división: $\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} : \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}$

Se factoriza cada uno de los factores y se procede a realizar la división

$$\frac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2} : \frac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2} = \frac{(2x+y)(2x-y)}{(2x-y)(x+y)} : \frac{(3x+2y)(2x+y)}{(3x+2y)(x+y)}$$
$$= \frac{(2x+1)(2x-1)(3x+2y)(x+y)}{(2x-y)(x+y)(3x+2y)(2x+1)} = 1$$

Ejercicios 8

Simplificar

1. $\frac{5m^2}{7n^3} : \frac{10m^4}{14an^4}$
2. $\frac{11x^2y^3}{7m^2} : 22y^4$
3. $\frac{x^3-x}{2x^2+6x} : \frac{5x^2-5x}{2x+6}$
4. $\frac{a^2-6a+5}{a^2-15a+56} : \frac{a^2+2a-35}{a^2-5a-24}$
5. $\frac{ax^2+5}{4a^2-1} : \frac{a^3x^2+5a^2}{2a-1}$
6. $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y} : \frac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}$
7. $\frac{x^3-1}{2x^2-2x+2} : \frac{7x^2+7x+7}{7x^3+7}$
8. $\frac{2a^2+7ab-15b^2}{a^3+4a^2b} : \frac{a^2-3ab-40b^2}{a^2-4ab-32b^2}$

8. Operatoria combinada de fracciones algebraicas

La simplificación de este tipo de operaciones, en las que se combinan operaciones básicas, se basa en la jerarquización de operaciones de izquierda a derecha, como sigue:

- Divisiones y productos
- Sumas y restas

Ejemplo 31

Simplificar $\frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} : \frac{a^2-16}{2a^2-2a}$

Se convierte la división en multiplicación invirtiendo el divisor y tendremos:

$$\frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} : \frac{a^2-16}{2a^2-2a} = \frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} \cdot \frac{2a^2-2a}{a^2-16}$$
$$= \frac{a-3}{4(a-1)} \cdot \frac{(a+5)(a+4)}{(a-3)^2} \cdot \frac{2a(a-1)}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{a(a+5)}{2(a-3)(a-4)} = \frac{a^2+5a}{2a^2-14a+24}$$

Ejercicios 9

1. $\frac{x^2-x-12}{x^2-49} \cdot \frac{x^2-x-56}{x^2+x+20} : \frac{x^2-5x-24}{x+5}$
2. $\frac{6a^2-7a-3}{a^2-1} : \frac{4a^2-12a+9}{a^2-1} \cdot \frac{2a^2-a-3}{3a^2-2a-1}$
3. $\frac{2}{x+3} : \frac{3x+3}{x^2-2x-8} : \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
4. $\frac{6x^2-12x}{2x^2+3x-9} : \frac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3} - \frac{3}{x+1}$
5. $\frac{8x^2-10x-3}{6x^2+13x+6} \cdot \frac{4x^2-9}{3x^2+2x} : \frac{8x^2+14x+3}{9x^2+12x+4}$
6. $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-1} + \frac{2x^2-4x}{x^2+x-6}$

9. Fracciones compuestas

Ejemplo 32

Simplificar $\frac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}$

Se opera el numerador: $\frac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}} = \frac{a^2-x^2}{ax}$

Se opera el denominador: $1+\frac{a}{x} = \frac{a+x}{x}$

Tenemos que $\frac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}} = \frac{\frac{a^2-x^2}{ax}}{\frac{a+x}{x}}$

Dividiendo el numerador entre el denominador nos queda:

$$= \frac{a^2-x^2}{ax} \cdot \frac{x}{a+x} = \frac{(a+x)(a-x)}{ax} \cdot \frac{x}{a+x} = \frac{a-x}{a}$$

Ejemplo 33

Realiza y simplifica la siguiente fracción: $\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}$

Se desarrollan el numerador y el denominador y se factorizan las expresiones resultantes, si es posible

$$\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}=\frac{\frac{(y-1)(y+3)-5}{y+3}}{\frac{(y+5)(y+3)-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-3-5}{y+3}}{\frac{y^2+8y+15-35}{y+3}}=\frac{\frac{y^2+2y-8}{y+3}}{\frac{y^2+8y-20}{y+3}}$$

$$\frac{\frac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\frac{(y+10)(y-2)}{y+3}}=$$

Posteriormente se dividen las fracciones y se simplifica aquellas expresiones que sea posible:

$$\frac{\frac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\frac{(y+10)(y-2)}{y+3}}=\frac{(y+3)(y+4)(y-2)}{(y+3)(y+10)(y-2)}=\frac{y+4}{y+10}$$

Ejercicios 10

Simplificar

1. $\frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}$
2. $\frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$
3. $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$
4. $\frac{x+4+\frac{3}{x}}{x-4-\frac{5}{x}}$
5. $\frac{a-4+\frac{4}{a}}{1-\frac{2}{a}}$
6. $\frac{\frac{2a^2-b^2}{a}-b}{\frac{4a^2+b^2}{4ab}+1}$
7. $\frac{\frac{1}{a}-\frac{9}{a^2}+\frac{20}{a^3}}{\frac{16}{a}-a}$
8. $\frac{\frac{20x^2+7x-6}{x}}{\frac{4}{x^2}-25}$
9. $\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x^2-1}}$

Ejemplo 34

Resuelve y simplifica: $\frac{b-1}{b+2-\frac{b^2+2}{b-\frac{b-2}{b+1}}}$

La fracción se simplifica al máximo al elegir las operaciones secundarias y reducirlas.

$$\frac{b-1}{b+2-\frac{b^2+2}{b-\frac{b-2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\frac{b^2+2}{\frac{b(b+1)-(b-2)}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\frac{b^2+2}{\frac{b^2+b-b+2}{b+1}}}=\frac{b-1}{b+2-\frac{b^2+2}{\frac{b^2+2}{b+1}}}=$$

$$\frac{b-1}{b+2-\frac{(b^2+2)(b+1)}{b^2+2}}=\frac{b-1}{b+2-(b+1)}=\frac{b-1}{1}=b-1$$

Ejercicios 11

1. $\frac{1}{a+\frac{1}{x}}$
2. $\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}$
3. $1-\frac{1}{2+\frac{a}{\frac{y}{3}-1}}$
4. $\frac{\left(a-2b+\frac{4b^2}{a+3b}\right)\left(a+2b-\frac{b^2}{a+2b}\right)}{1+\frac{a}{b}}$
5. $\left(a+\frac{1}{1+\frac{b}{a+b}}\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b-\frac{\frac{7}{4}b^2}{2a+3b}\right)$

Ejercicios de alternativas 1

1. $\dfrac{x^2+x}{x+1} =$

   A) x^2

   B) x

   C) $2x$

   D) $x+1$

2. $\dfrac{4a-4b}{2b-2a}$

   A) -2

   B) 2

   C) 2a

   D) $2a-2b$

3. $\dfrac{5x^3y^2}{-125x^{-4}y}$

   A) $\frac{x^{-1}y}{-25}$

   B) $\frac{x^{-1}y^{-1}}{-25}$

   C) $\frac{x^7y}{-25}$

   D) $\frac{xy}{-25}$

4. $\dfrac{2p-2q}{4q-4p}$

   A)$-\frac{1}{2}$

   B) 0

   C) $\frac{1}{2}$

   D) $\frac{p+q}{q+p}$

5. $\dfrac{-7a^3b^{-2}}{21a^{-5}b^3} =$

   A) $\frac{-3a^8}{b^5}$

B) $\frac{-3}{a^2b^5}$

C) $\frac{3a^2}{b^5}$

D) $-\frac{a^8}{3b^5}$

6. $\dfrac{p^{-10}q^3}{p^{-3}q^{-12}} =$

A) $p^{-7}q^{15}$

B) $p^{-13}q^{-9}$

C) p^7q^{15}

D) p^7q^9

7. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3} =$

A) 1

B) 0

C) $\frac{3+x}{3x}$

D) $\frac{9-x^2}{3x}$

8. $\dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{4x^2}{15} =$

A) $\frac{x^2}{3}$

B) $\frac{x^2}{10}$

C) $-\frac{x^2}{15}$

D) $-\frac{x^2}{3}$

9. $\dfrac{5z}{xy} - \dfrac{6x}{yz} =$

A) $-\mathrm{zx}$

B) $-\frac{1}{y^2}$

C) $\frac{5z-6x}{y}$

D) $\frac{5z^2-6x^2}{xyz}$

Respuestas preguntas de alternativas 1

Nº de la pregunta	Alternativa correcta
1.	B
2.	A
3.	C
4.	A
5.	D
6.	A
7.	D
8.	A
9.	D
10.	D
11.	A
12.	D
13.	D
14.	C
15.	A
16.	B
17.	C
18.	A
19.	B
20.	C
21.	D
22.	B
23.	C
24.	D
25.	B
26.	A
27.	D
28.	D
29.	D
30.	B

FUNCIÓN Y ECUACIÓN CUADRÁTICA

CAPÍTULO 14

CAPÍTULO 14: FUNCIÓN Y ECUACIÓN CUADRÁTICA

En esta sección, estudiaremos en mayor profundidad un caso particular de polinomios, que consiste en considerar uno de grado 2, el cual es conocido por función cuadrática y su gráfica es una curva llamada parábola. La función cuadrática en su forma más general tiene por dominio R, su recorrido es variable y se representa por la fórmula

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Propiedades interesantes que podemos empezar a estudiar son -a consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra- las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática, esto es, para que valor(es) de x se cumple que $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$. Para obtener estos valores existe una fórmula que sólo depende de los coeficientes, que es

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

donde una de las soluciones es usando el signo suma y la otra el signo resta. Ademas por el Teorema fundamental del álgebra, sabemos que se puede factorizar de la siguiente manera $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$ con x_1 , x_2 las raíces o soluciones

La fórmula de las raíces de ésta función, se puede obtener simplemente factorizando la expresión $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde trataremos de escribir como un cuadrado de binomio, es decir,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

por lo tanto se tiene que

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

donde notamos que el lado izquierdo de la expresión tiene la forma de un cuadrado de binomio. En efecto

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

por lo que reemplazando obtenemos

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \rightarrow \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \sqrt{a}x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y así podemos concluir que los x para los cuales la función cuadrática se anula tienen la forma de

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ahora, de esta fórmula se obtienen una serie de resultados interesantes sobre pro - piedades que tendrán las raíces de las funciones cuadráticas

Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Este número se encarga de "discriminar" sobre cual será la naturaleza de las raíces, de la siguiente manera

$$\Delta = \begin{cases} < 0 \rightarrow & Raices\ complejas\ conjugadas \\ = 0 \rightarrow & Raices\ reales\ e\ iguales \\ > 0 \rightarrow & Raices\ iguales\ y\ distintas \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

1. Gráfica, vértice y ejes de simetría de la función cuadrática

Lo primero que revisaremos antes de poder ver la gráfica de una función cuadrática, será ver donde corta a los ejes y además veremos que la parábola también tiene concavidad (explicaremos el significado de esta cuando corresponda), y luego con esto presentaremos la apariencia gráfica de una parábola en el plano cartesiano.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \quad con\ raices\ x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

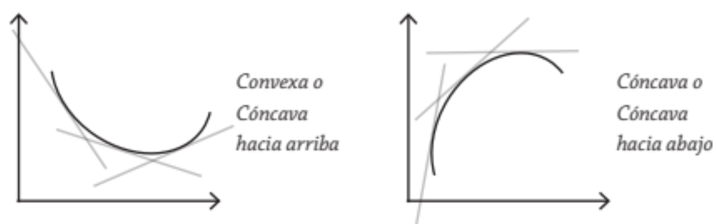
Ya sabemos que el discriminante indica la naturaleza de las raíces que tiene la función, por lo tanto, como éstas indican los puntos donde la función intersecta al eje X, entonces por medio de la discriminante podremos saber cuantas veces corta la parábola al eje X de la siguiente forma

$$\Delta = \begin{cases} < 0 \ \rightarrow \ No\ corta\ el\ eje\ \ x \\ = 0 \ \rightarrow \ Corta\ en\ un\ punto\ al\ eje\ x \\ > 0 \ \rightarrow \ Corta\ en\ dos\ puntos\ al\ eje\ x \end{cases}$$

Para ver el intercepto con el eje de las ordenadas o eje Y, es mucho más sencillo ya que este dado por el coeficiente libre de la función cuadrática, es decir, si la función es $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces el intercepto con el eje Y será en el punto (0, c).

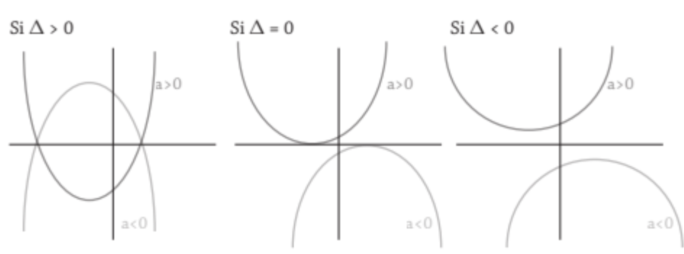
a última propiedad que veremos de la función cuadrática antes de presentar su gráfico, es la convexidad y para ello necesitamos primero saber que significa esto. Diremos que una función f es convexa (respectivamente cóncava) si para cualquier recta que comparta uno y sólo un punto con la función f, entonces para cualquier valor de x ∈ ℝ la imagen por f de él será mayor (respectivamente menor) que la imagen por la recta.

El valor del coeficiente a en la ecuación general cuadrática, nos indica la convexidad de la función, esto es, si la parábola abre hacia arriba (convexa) o abre hacia abajo (cóncava). Más específicamente



$$a = \begin{cases} > 0\ \ convexa\ abre\ hacia\ arriba \\ < 0\ concava\ abre\ hacia\ abajo \end{cases}$$

Luego, tendremos que la gráfica de la parábola será -dependiendo de la discriminante y el coeficiente a- alguna de las siguiente



Corta en dos puntos el eje X · Corta en un solo punto al eje X · No corta el eje X

Otro elemento importante de la función cuadrática es el vértice, el cuál definiremos de la siguiente manera: si consideramos todas las rectas que comparten con nuestra función cuadrática uno y sólo un punto, tomemos la única de dichas rectas que po -

see pendiente igual a 0 y entonces el punto que comparten lo llamaremos el vértice de la parábola. Este punto tiene la particularidad que si a >0 entonces es un mínimo y si a <0 es un máximo para la función.

Para obtener dicho punto, simplemente utilizaremos la siguiente fórmula

$$V = -\frac{b}{2a}, f\frac{b}{2a}$$

y si evaluamos

$$f-\frac{b}{2a} = a-\frac{b}{2a}+b-\frac{b}{2a}+c = \frac{ab^2}{4a^2}+\frac{b^2}{2a}+c$$
$$= \frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2+4a^2c}{4a^2}$$
$$= \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

por lo tanto

$$V = -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}$$

Con lo anterior podemos ver que la curva es simétrica con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$

esto es, si tomamos dos valores x_1 y x_2 los cuales equidistan de $x = -\frac{b}{2a}$ pero en distintas direcciones, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. La recta antes mencionada es conocida como eje de simetría de la parábola.

2. Una empresa produce cierto producto el cual tiene un costo de producción $Q(x) = 40-x$ donde x es la cantidad de producción en miles (los cuales se producen todos de una sola vez y sólo una vez). Si el producto se vende en las tiendas al doble del precio de producción ¿Cuál es la utilidad máxima que se puede obtener?

Notemos primero que tenemos un costo de producción con una ecuación explícita pero no sabemos cuando será ni el precio de venta ni la utilidad, por lo que primero debemos formular dichas ecuaciones. El precio de venta de los productos será 2Q(x) y como se producen x productos, entonces lo que obtendré por la venta de todos ellos es 2xQ(x) y luego, la utilidad generada por dicha venta será lo obtenido en la venta menos el costo de producción, es decir

$$2xQ(x) - Q(x) = 80x - 2x^2 - 40 + x = 81x - 2x^2 - 40$$

Luego, la ecuación anterior representa una parábola que abre hacia abajo y por ello, el vértice de esta nos indica su valor máximo, es decir, el vértice representa la máxima utilidad que se puede obtener y cuanto se debe producir para alcanzar dicha utilidad, de la siguiente manera.

$$V-\frac{81}{-4}-\frac{6.561+320}{-8} = \frac{81}{4}\frac{6881}{8}$$

es decir, la utilidad máxima se obtiene al producir $\frac{81}{4}$ mil unidades, obteniendo una utilidad de $\frac{6.881}{8}$

Ejemplo 1

Encuentre las soluciones a la ecuación $\boldsymbol{x^2 - 4x - 5 = 0}$

Lo primero que debemos hacer en estos casos es buscar alguna factorización conveniente y ver si de esa manera podemos evitar el uso de la fórmula. Para ello notemos que $(x-5)(x+1) = x^2 - 5x + x - 5 = x^2 - 4x - 5$
por lo tanto, tendremos que $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$

Bien, ahora como ambos polinomios (ecuaciones cuadráticas) son iguales, entonces se anulan en los mismos puntos y por ende tienen las mismas raíces, y luego solo observando podemos concluir que las raíces para la ecuación son -1 y 5 .

5. Resolución de ecuaciones completas de segundo grado sin denominadores aplicando la formula general

Se entenderá por formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Aplicamos la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquí $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$, luego sustituyendo y teniendo presente que al sustituir b se pone con signo cambiado, tendremos:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Entonces

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 y $\frac{1}{3}$ son las raíces de la ecuación dada y ambas anulan la ecuación.

Sustituyendo x por 2 en la ecuación dada $3x^2 - 7x + 2 = 0$, se tiene:

$$3(2^2) - 7(2) + 2 = 12 - 14 + 2 = 0$$

Sustituyendo x por $\frac{1}{3}$: $3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = 0$

Ejemplo 3

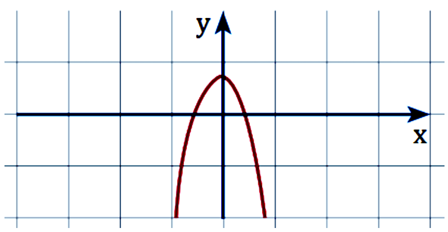
Resolver la ecuación $\boldsymbol{6x - x^2 - 9 = 0}$

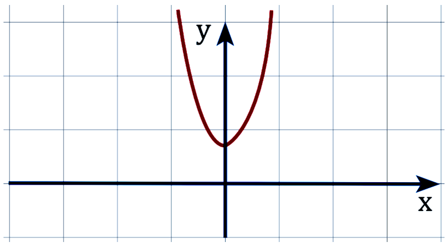
Ordenando y cambiando signos: $x^2 - 6x + 9 = 0$

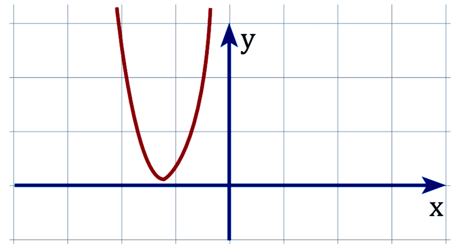
Vamos a aplicar la fórmula teniendo presente que a, coeficiente de x^2 es 1:

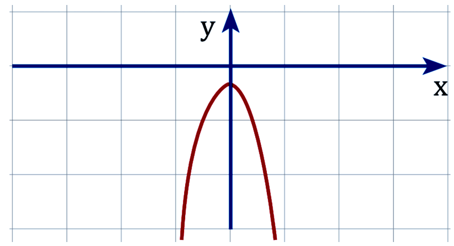
Ejercicios de alternativas 1

1. ¿Cuál de los gráficos representa mejor a la función $f(x) = -x^2 + 1$?

A.


B.


C.


D.


2. Considera la parábola $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La parábola se abre hacia arriba.
II. Su vértice se encuentra en $\{-1, 0\}$.
III. Su eje de simetría es $x = -1$.

A. Solo I.
B. Solo I y II.
C. Solo II y III.
D. I, II y III .

3. Si la base de un triángulo mide $\sqrt{3a}$ y su altura mide $\frac{\sqrt{3a}}{2}$, entonces ¿cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene igual área que el triángulo?

A. $\frac{3a}{2}$
B. $\frac{3a}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3a}}{2}$

4. Si $F(x) = x^2 + 3x - 3$, entonces $f(x + 1)$ es igual a:

A. $x^2 + 5x + 4$
B. $x^2 + 3x - 2$
C. $x^2 + 4x - 3$
D. $x^2 + 5x + 1$

5. El producto de dos números pares consecutivos positivos es 624. ¿Cuál es la suma de estos?

A. 24
B. 26
C. 28
D. 50

6. Sea $g(x): R^+ \to R$, definida por $g(x) = x^2 - x - 6$, entonces el conjunto de todos los valores de x para los cuales $g(x) = 0$ es:

A. $\{3, -2\}$
B. $\{-2\}$
C. $\{-3,2\}$
D. $\{3\}$

7. La distancia que recorre un móvil viene dada por la función $x = 2t - \frac{t^2}{2}$ con x expresado en metros y el tiempo t en segundos. Entonces, la distancia máxima que recorre el cuerpo es:

A. 0 m
B. 1 m
C. 2 m
D. 4 m

8. Sea $g(x): R^+ \to R$, definida por $g(x) = 3x^2 - x - 6$, determine el valor de $\frac{g(2) + 2 \cdot g(3)}{g(1)}$:

A. – 10
B. 10
C. 27
D. – 27

9. La suma de las soluciones de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

A. $-2,5$

B. $0,5$

C. 1

D. $\mathbf{2,5}$

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones NO tiene solución en los números reales?

A. $2x^2 - 5x - 5 = 0$

B. $2x^2 - 7x - 10 = 0$

C. $3x^2 - 8x + 1 = 0$

D. $3x^2 + 2x + 1 = 0$

11. ¿Cuál es el valor de a en la ecuación $a(x + a) - 3x(a + 3) = -4x + \frac{a}{2}$, cuando $x = 5$?

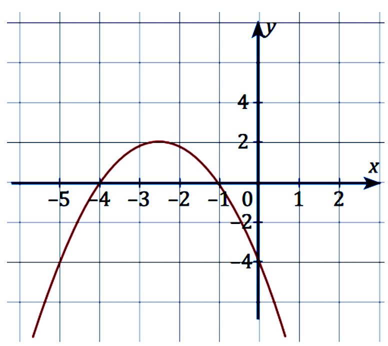
A. 12,5

B. 2

C. -2

D. (a) y (c)

12. La función cuadrática que representa la parábola del gráfico adjunto es:



A. $f(x) = x^2 + 5x + 4$

B. $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

C. $f(x) = x^2 + 5x - 4$

D. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

13. La parábola asociada a la función $f(x) = x^2 - 10x + 25$ corta al eje x en el(los) punto(s):

A. $(-5,0)$

B. $(5,0)$

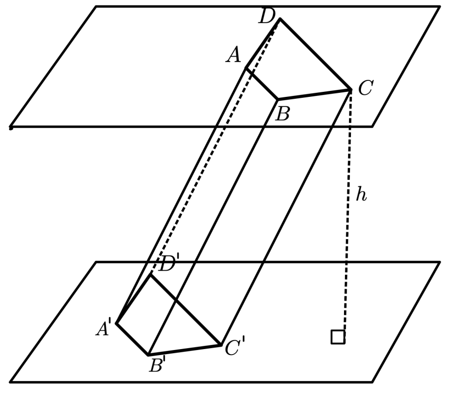
C. $(10,0)$

Respuestas de ejercicios de alternativas 1

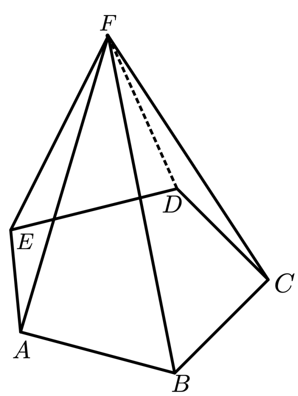
Número	Respuesta
1	A
2	D
3	C
4	D
5	D
6	D
7	C
8	A
9	A
10	D
11	D
12	B
13	B
14	A
15	D
16	A
17	A
18	A
19	D
20	D
21	C
22	A
23	C
24	C
25	C
26	A
27	B
28	A
29	C
30	D

VOLÚMENES

CAPÍTULO 17

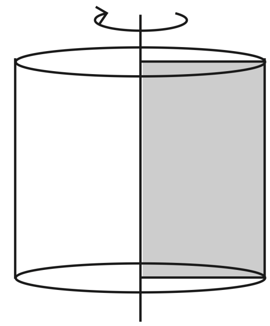


Los prismas son cuerpos geométricos tridimensionales que se pueden clasificar en dos tipos: rectos y oblicuos. Un prisma recto tiene sus aristas perpendiculares a las aristas de las bases, mientras que un prisma oblicuo no cumple con esta condición. El prisma más conocido es el paralelepípedo, que tiene dos bases paralelogramos y caras laterales rectangulares.
Las pirámides son también poliedros tridimensionales que tienen una base que es un polígono y caras laterales que son triángulos que se encuentran en un vértice común llamado cúspide. Si el polígono base es regular, entonces se dice que la pirámide es regular.
En una pirámide, la altura es la distancia entre la cúspide y la base. Además, la apotema es la distancia entre el centro de la base y el punto medio de cualquiera de sus lados. La apotema es útil para calcular el área de la base de la pirámide y su volumen.
Es importante tener en cuenta que existen diferentes tipos de pirámides, como la pirámide triangular, la pirámide cuadrangular, la pirámide pentagonal y así sucesivamente, dependiendo del número de lados de su base. Además, al igual que los prismas, las pirámides pueden ser clasificadas como regulares o irregulares.

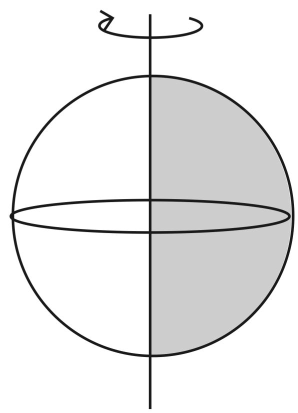


Ahora es el turno de los cuerpos redondos y son principalmente: la esfera y el cilindro. Para estudiarlos necesitaremos saber lo que es una superficie de revolución. Las superficies de revolución son las generadas por un curva o figura que gira en 360o alrededor de una recta dada y si uno sigue todo el camino que dicha curva o figura hace al girar, eso es la superficie de revolución generada por la curva o figura.

• **Cilindro:** Es la superficie de revolución generada por un rectángulo con directriz en uno de sus lados.



• **Esfera:** Es la superficie de revolución generada por un semi-circulo con directriz en su diámetro.

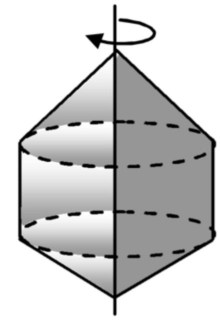


En general calcular volúmenes no es una tarea sencilla, pero para algunos casos la tarea se facilita y a continuación, mostraremos como calcular el volumen de algunos poliedros y cuerpos redondos.

• **Tronco de cono:** es un sólido geométrico que se forma cuando se corta un cono por un plano paralelo a su base. El tronco de cono resultante tiene dos bases circulares, una superior y otra inferior, que están en el mismo plano, y una superficie lateral curva y troncocónica. La altura del tronco de cono es la distancia entre las bases, y su generatriz es la recta que une un punto de la circunferencia de la base superior con un punto de la circunferencia de la base inferior. La generatriz también es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la generatriz, el radio de la base mayor y la altura del tronco de cono.

El volumen de un tronco de cono se puede calcular utilizando la fórmula: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, donde h es la altura del tronco de cono, R y r son los radios de las bases superior e inferior, respectivamente.

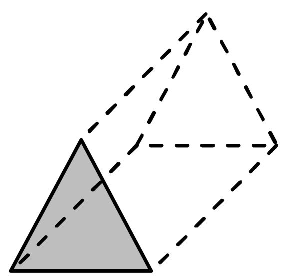
• **Un cilindro con dos conos:** es un tipo de sólido geométrico compuesto que se forma al unir dos conos de igual altura y diámetro por sus bases circulares y ubicar un cilindro de la misma altura y diámetro entre ambas bases. El resultado es un sólido con una forma parecida a una botella o un tórax.



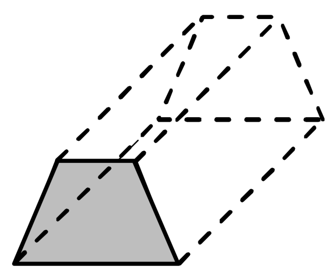
En términos matemáticos, el cilindro con dos conos es un sólido de revolución generado al girar un trapecio rectángulo alrededor de uno de sus lados rectos. El resultado es un sólido compuesto por un cilindro de altura igual a la altura del trapecio y dos conos cuyas bases coinciden con las bases del trapecio y cuyas alturas son iguales a la altura del trapecio.

Este sólido puede ser utilizado en algunas aplicaciones, como en la fabricación de tanques de almacenamiento o en la construcción de algunos tipos de embudos.

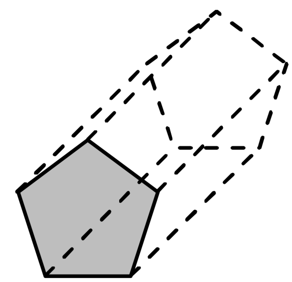
• **Prisma:** Para calcular el volumen de un prisma, basta calcular el área de la base por la altura del mismo. Por ejemplo, un cubo tiene base un cuadrado de lado a y altura a, por ello su volumen es a^3.



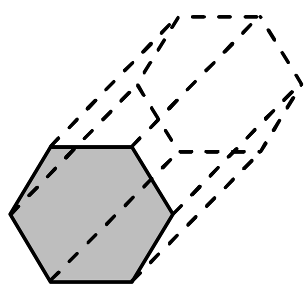
Prisma triangular



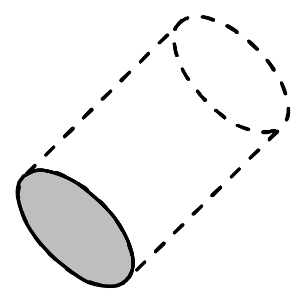
Prisma trapezoidal



Prisma pentagonal



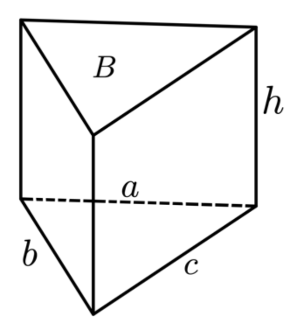
Prisma hexagonal



Prisma circular recto

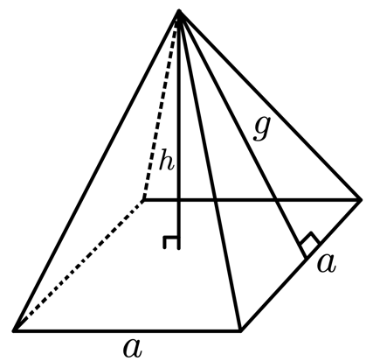
• **Prisma recto de base triangular:** Un prisma recto de base triangular es un poliedro que tiene dos bases triangulares congruentes y paralelas, y caras laterales rectangulares que conectan las bases perpendicularmente. En este caso, las caras laterales son rectángulos porque el prisma es "recto", lo que significa que las aristas de las bases son perpendiculares a las caras laterales.

$$V = Bh$$



Por otro lado, el área superficial de un prisma recto de base triangular se puede calcular sumando el área de las dos bases triangulares y las áreas de las tres caras laterales rectangulares. Si el triángulo de la base tiene una base b y una altura h, y la altura del prisma es H, entonces el área total del prisma será:

$$A = h(a + b + c) + 2B\text{; B es área basal}$$



• **Pirámide recta de base cuadrada** es un sólido geométrico que tiene una base cuadrada y cuatro caras triangulares iguales que se unen en un punto en la parte superior, llamado cúspide. Todas las caras laterales de la pirámide son triángulos isósceles que comparten un vértice común en la cúspide.

Para calcular el volumen de una pirámide recta de base cuadrada, se utiliza la fórmula $V = \frac{1}{3}a^2h$, donde "a" es la longitud de un lado de la base cuadrada y "h" es la altura de la pirámide. La altura se mide desde la cúspide hasta la base.

Por otro lado, el área total de una pirámide recta de base cuadrada se puede calcular sumando el área de la base cuadrada y las cuatro áreas triangulares laterales. La fórmula para el área total es $\mathrm{A} = 2ag + a^2$, donde "a" es la longitud de un lado de la base cuadrada y "g" es la longitud de una de las aristas laterales de la pirámide.

• **Pirámide:** Para el volumen de una pirámide basta conocer la altura h y el área de la base Ab, y con eso tendremos que el área de la pirámide es $V_p = \frac{1}{3}h \cdot A_b$

• **Esfera:** El volumen de una esfera, no puede ser calculado de manera tan sencilla como los anteriores, por lo que sólo daremos la forma de calcularlo. Si la esfera tiene radio r, entonces su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$

• **Cilindro:** El volumen de un cilindro se calcula de manera análoga a los prismas, es decir, el área de la base(que es el área de un circulo) A_b por la altura h. Es decir, $A_c = A_b \cdot h = \pi r^2 h$

Formulas	Volumen	Área Superficial
Prisma	$A_b \cdot \mathrm{h}$	
Pirámide	$\frac{1}{3}A_b \cdot \mathrm{h}$	
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Cilindro	$\pi r^2 h$	$2\pi r(r + h)$

A_b es área basal

h es altura; r es radio

Ejercicios 1

Determina el área lateral, total y volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma rectangular de dimensiones 2, 3 y 5 cm.
2. Prisma cuya base es un triángulo equilátero de 4 cm de lado y 6 cm de altura.
3. Prisma cuadrangular si el lado de la base es 1 cm y su altura 4 cm.
4. Prisma de base un hexágono regular de lado 2.5 cm y altura 6.5 cm.
5. Paralelepípedo de dimensiones $\sqrt{2}$, 4 y $2\sqrt{2}$
6. Cubo de lado 2 cm.
7. Prisma cuadrangular si el área de la base es 12 cm2 y la altura es 8 cm.
8. Prisma cuya base es un octágono regular de lado 10 cm y apotema $\left(5 + 5\sqrt{2}\right)$ cm si su altura es de 5 cm.
9. Prisma hexagonal regular si el perímetro de la base es de 60 cm y la altura es el doble que el lado de la base.
10. Determina el área lateral de un prisma cuadrangular de volumen de 16 cm3, si la altura mide 4 cm.
11. Determina el volumen de un cubo cuya diagonal es $3\sqrt{3}$

Ejercicios 2

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el área y volumen de una esfera con radio de 4 cm.
2. Encuentra el volumen de una esfera cuyo diámetro mide $6\sqrt{5}\ cm$
3. El radio de una esfera es de 3 cm, determina el volumen de un sector esférico cuyo casquete esférico tiene una altura de 1 cm.
4. Determina el volumen de un sector esférico si la base de su casquete esférico se encuentra a 4 cm del centro de la esfera cuyo radio es de 9 cm.
5. El radio de una esfera mide 10 cm, ¿cuál es el área del casquete esférico cuya base se encuentra a 7 cm del centro de la esfera?
6. ¿Cuál es el área de un casquete esférico cuya base dista del centro de una esfera 2 cm y su radio mide $2\sqrt{15}$?
7. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya base tiene una altura de 2 cm y el diámetro de la esfera mide 6 cm?
8. Encuentra el volumen de un segmento esférico si su base tiene un radio de 4 cm y el radio de la esfera mide 5 cm.
9. Una esfera con un radio de 12 cm se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 4 cm y 7 cm respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.
10. Una esfera con un radio de 1 cm se corta mediante dos planos paralelos, uno a cada lado del centro a una distancia de $\frac{1}{2}cm$ y $\frac{1}{3}cm$ respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.

Respuestas

Respuestas 1

1. $A_L = 50\ cm^2, A_T = 62\ cm^2, V_T = 30cm^3$
2. $A_L = 72\ cm^2, A_T = \left(72 + 8\sqrt{3}\right)\ cm^2, V_T = 24\sqrt{3}\ cm^3$
3. $A_L = 16\ cm^2, A_T = 18\ cm^2, V_T = 4\ cm^3$
4. $A_L = 97{,}5\ cm^2, A_T = \frac{195+75\sqrt{3}}{2} cm^2, V_T = \frac{975}{8}\sqrt{3}cm^3$
5. $A_L = \left(16\sqrt{2} + 8\right)\ cm^2, A_T = \left(24\sqrt{2} + 8\right)\ cm^2, V_T = 16\ cm^3$
6. $A_L = 16\ cm^2, A_T = 24\ cm^2, V_T = 8\ cm^3$
7. $A_L = 64\sqrt{3}\ cm^2, A_T = \left(64\sqrt{2} + 24\right)\ cm^2, V_T = 96\ cm^3$
8. $A_L = 400\ cm^2, A_T = 400\left(2 + \sqrt{2}\right)\ cm^2, V_T = 1000\left(1 + \sqrt{2}\right)\ cm^3$
9. $A_L = 1200\ cm^2, A_T = 300\left(4 + \sqrt{5}\right)\ cm^2, V_T = 3000\sqrt{3}\ cm^3$
10. $A_L = 16\sqrt{3}\ cm^2$,
11. $V_t = 27u^3$

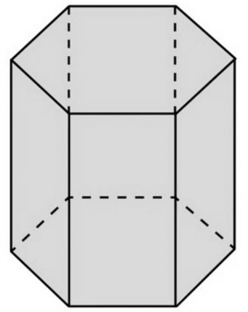
Respuestas 2

1. $A = 64\pi cm^2, V = \frac{256}{3}\pi cm^2$
2. $V = 180\sqrt{5}\pi cm^3$
3. $V = 6\pi\ cm^3$
4. $V = 270\pi\ cm^3$
5. $A = 60\pi\ cm^2$
6. $A = 96\pi\ cm^2$
7. $V = \frac{28}{3}\pi\ cm^3$
8. $V = \frac{52}{3}\pi\ cm^3$
9. $V = 339\pi\ cm^2$

   $A = 72\pi\ cm^2$
10. $V = \frac{211}{216}\pi\ cm^2$

Ejercicios de alternativas 1

1. ¿Cuántas caras laterales tiene el prisma?



A. 2 caras.

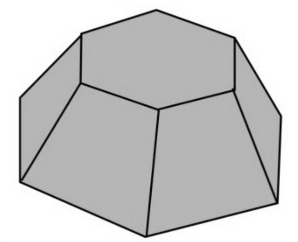
B. 4 caras.

C. 6 caras.

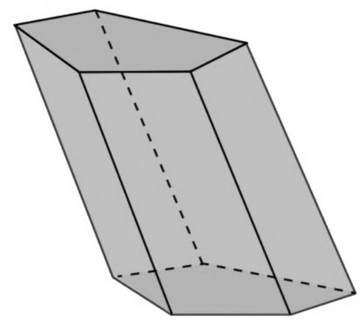
D. 8 caras.

2. De los siguientes cuerpos geométricos, ¿cuál no es un prisma?

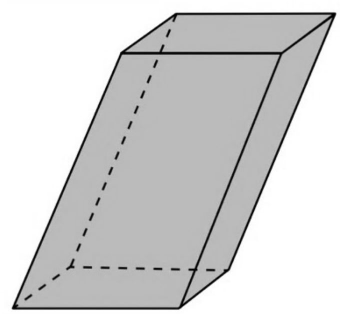
A.



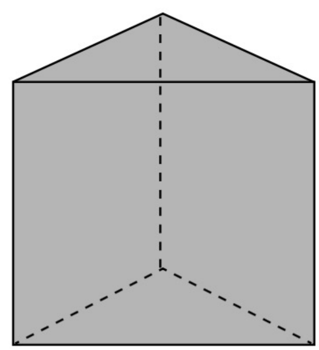
C.



B.



D.



3. ¿Cuántas aristas tiene un prisma si su cara basal es un  ?

A. 6 aristas.

B. 12 aristas.

C. 15 aristas.

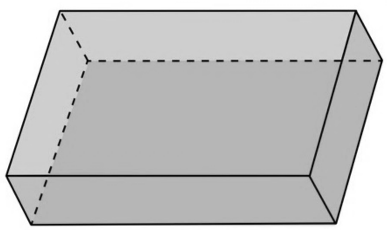
D. 18 aristas.

4. ¿Cuántos vértices tiene un prisma de base pentagonal?

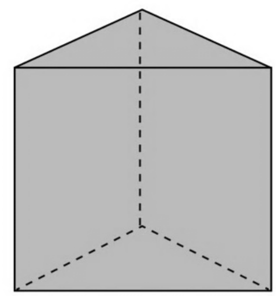
A. 5 vértices.
B. 10 vértices.
C. 12 vértices.
D. 15 vértices.

5. De los siguientes cuerpos geométricos, ¿cuál es un paralelepípedo?

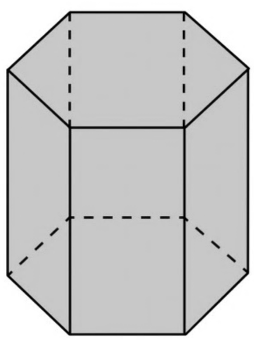
A.



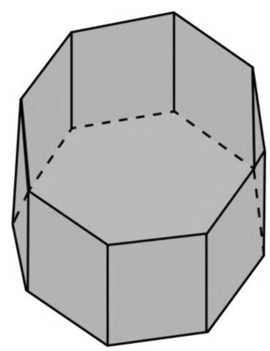
C.



B.



D.

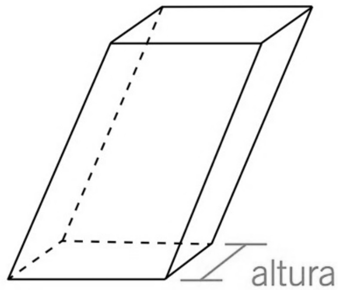


6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta?

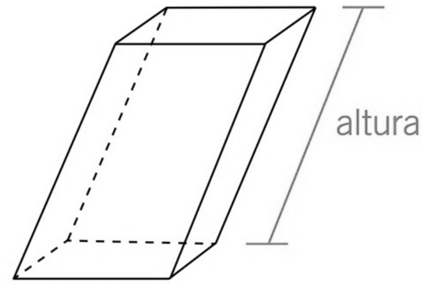
A. Todo paralelepípedo tiene en total ocho vértices.
B. Todo paralelepípedo tiene en total doce aristas.
C. Todo paralelepípedo tiene en total seis caras.
D. Todo paralelepípedo tiene sus caras rectangulares.

7. ¿En cuál de las siguientes alternativas se muestra la altura del paralelepípedo?

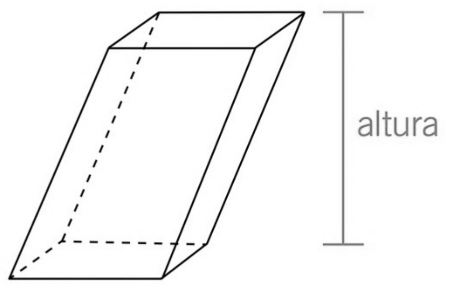
A.



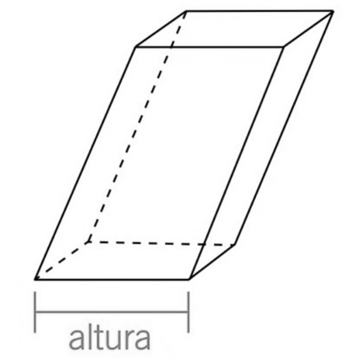
C.



B.

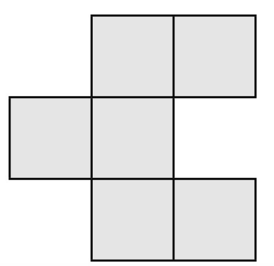


D.

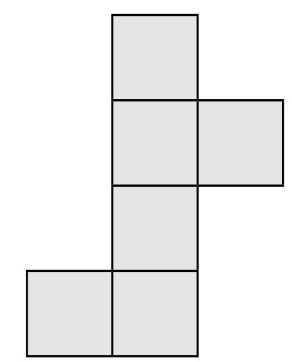


8. ¿Con cuál de las siguientes redes se puede formar un paralelepípedo?

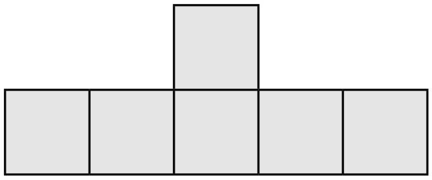
A.



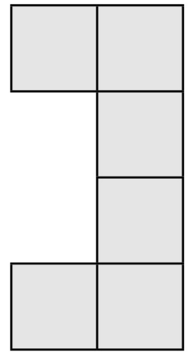
C.



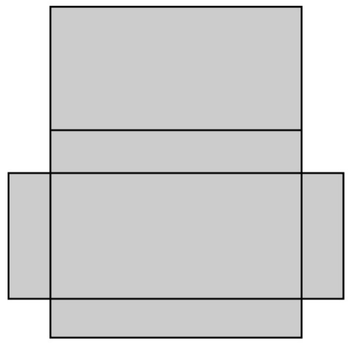
B.



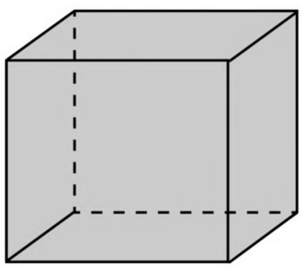
D.



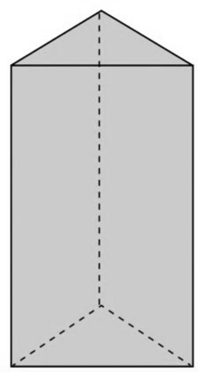
9. ¿Qué cuerpo geométrico puede formarse con la siguiente red?



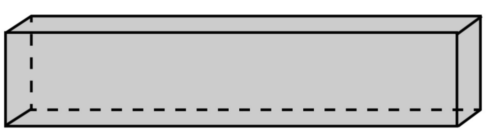
A.



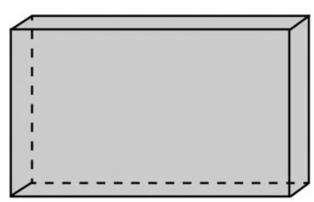
C.

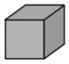


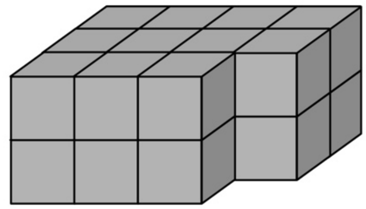
B.



D.



21. Si cada  tiene un volumen de 1 cm^3, ¿cuánto volumen le falta al siguiente cuerpo para tener 48 cm^3?



A. 18 cm^3

B. 20 cm^3

C. 22 cm^3

D. 26 cm^3

22. La tabla muestra distintos recipientes con sus capacidades. ¿Qué recipiente tiene una menor capacidad?

Capacidad de un recipiente	
Recipiente	Capacidad
Botella	1,5 L
Balde	1.000 cm^3
Bidón	5 dm^3
Estanque	7 m^3

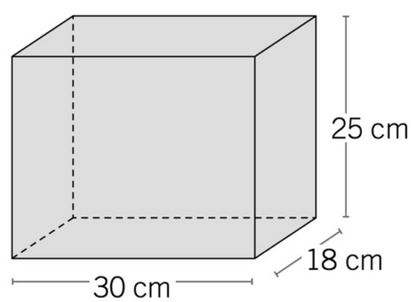
A. La botella.

B. El balde.

C. El bidón.

D. El estanque.

23. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo?



A. 1.740 cm^3

B. 3.480 cm^3

C. 11.250 cm^3

D. 13.500 cm^3

24. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya arista mide 12 cm?

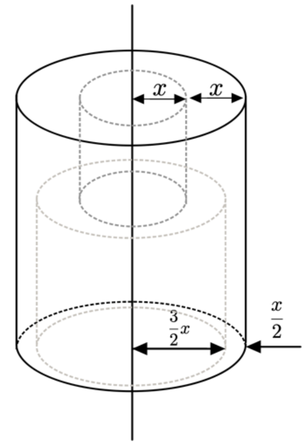
A. 144 cm^3

B. 864 cm^3

C. 1.728 cm^3

D. 10.368 cm^3

8. En un cilindro se han realizados perforaciones, también cilíndricas de radios x y $\frac{3}{2}x$, cada una de 50 cm de alto. Si el espesor de las paredes resultantes son, respetivamente, de x y $\frac{x}{2}$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el volumen del material resultante después de las perforaciones, en función de x?



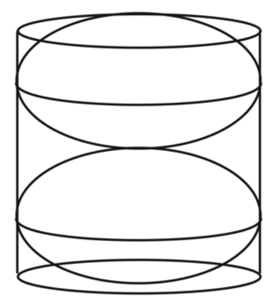
A) $\frac{225}{2}\pi x^2$

B) $300\pi x^2$

C) $\frac{375}{2}\pi x^2$

D) $\frac{475}{2}\pi x^2$

9. En la figura se muestran dos esferas tangentes de radio r que intersectan al manto del cilindro en sus ecuadores. Además, cada esfera toca el centro de una de las bases del cilindro ¿Cuál es el volumen que sobra entre las esferas y el cilindro?



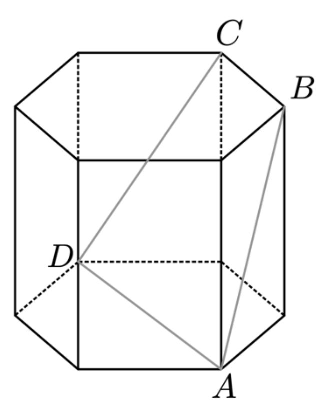
A) $\frac{1}{3}\pi r^3$

B) $\frac{4}{3}\pi r^3$

C) $\frac{4}{3}\pi r^2$

D) πr^3

10. En la figura se muestra un prisma hexagonal de aristas de igual longitud. El cuadrilátero ABCD es un



A) Rombo

B) Rectángulo

C) Trapecio

D) Cuadrado

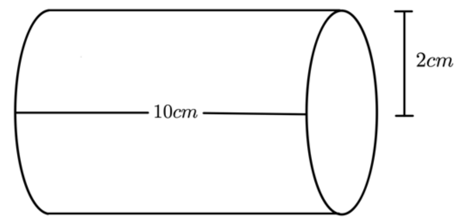
28. La figura representa un tubo de alcantarillado. En un segundo pasa una cantidad de agua equivalente a su capacidad. ¿Cuántos centímetros cúbicos pasan por él en 5 segundos (si consideramos $\pi = 3{,}14$)?

A) 700

B) 652

C) 650

D) 628



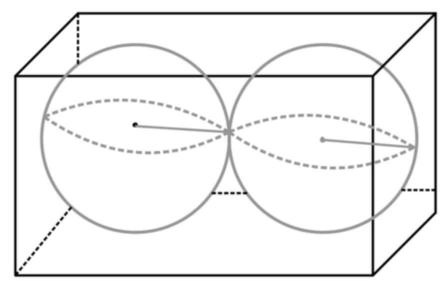
29. La figura adjunta, muestra una caja rectangular de volumen 128 cm^3, que contiene bombones en forma de esfera, tangentes entre si y a las paredes de la caja. ¿Cuál es el área de estos bombones?

A) $54\pi\ cm^2$

B) $36\pi\ cm^2$

C) $32\pi\ cm^2$

D) $28\pi\ cm^2$



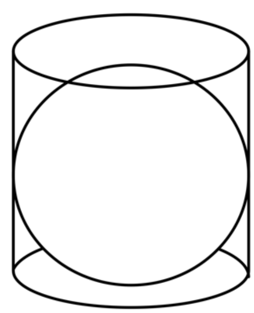
30. Se inserta una esfera de radio R en un cilindro de volumen $\pi r^2 h$ cuyas paredes son tangentes a la esfera, de volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$, como muestra la figura adjunta. El volumen que no ocupa la esfera es

A) la mitad del cilindro.

B) la mitad de la esfera.

C) la cuarta parte del cilindro.

D) las dos terceras partes del cilindro.



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

CAPÍTULO 19

CAPÍTULO 19: TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Definición

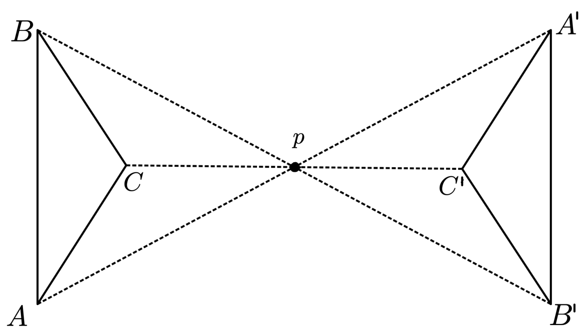
La palabra isometría viene del griego iso (igual o mismo) y metría (medir), por lo que se puede entender como "de igual medida", por ello las transformaciones isométricas se pueden definir esencialmente como transformaciones de una figura plana, donde no se alteran sus dimensiones y la figura resultante es congruente a la inicial. En el plano, distinguimos tres tipos de transformaciones isométricas: *Simetría, Traslación* y *rotación*.

1 Simetría

Existen dos tipos de simetrías, la simetría central o respecto a un punto y la simetría axial o respecto a un eje o recta. La simetría central consiste en la transformación, que dado un punto p (centro de simetría), asocia a cada punto, otro como imagen que cumple las dos siguientes condiciones,

• El punto inicial y la imagen de él vía la transformación, están a la misma distancia del centro de simetría p.
• Tanto el punto inicial, como su imagen y el punto p son colineales, es decir, pertenecen a la misma recta.

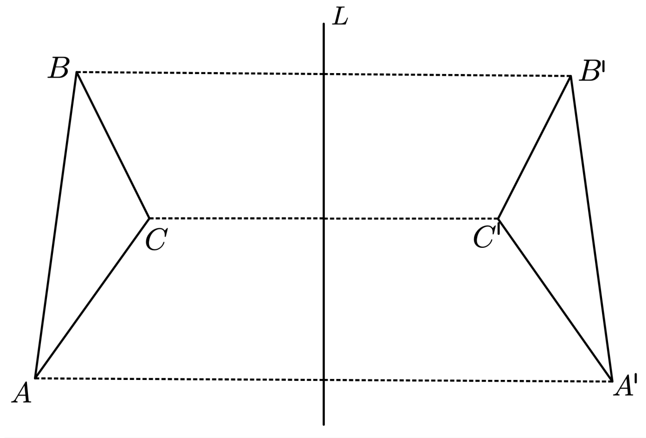
La figura muestra un ejemplo de la simetría de un triángulo respecto al punto p



Por otro lado una simetría axial respecto a la recta L consiste en asociar a cada punto de una figura, otro punto que cumple las siguientes dos condiciones:

• La distancia del punto a la recta L, es la misma que la distancia de su imagen a la recta.
• El segmento que une a cada punto con su imagen, es perpendicular a la recta L.

Importante:
- Una simetría (reflexión) respecto de un punto O equivale a una rotación de 180° de centro O.
- Los trazos de la figura original son paralelos con los trazos homólogos de la figura transformada.
- El sentido de la figura no cambia respecto al giro de las manecillas del reloj.
- Todo punto del plano cartesiano $A(x, y)$ tiene su simétrico $A'(-x, -y)$ con respecto al origen $O(0,0)$



La figura anterior muestra un ejemplo de simetría axial

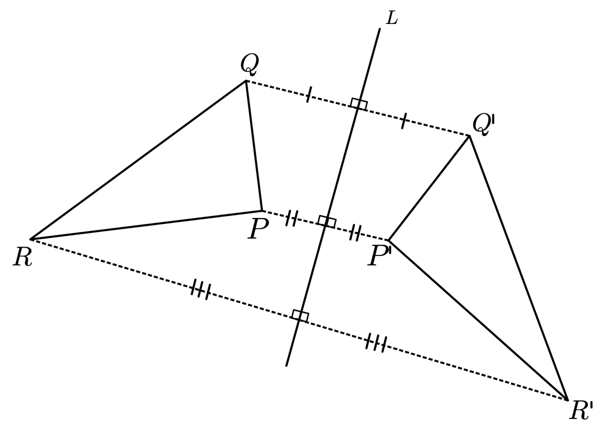
Esta se puede asimilar al reflejo de un espejo usual.

Ejercicios 1

1. ¿Qué es la simetría central?
2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplirse en la simetría central?
3. ¿Qué es la simetría axial?
4. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplirse en la simetría axial?
5. ¿Cuál es la relación entre la simetría respecto a un punto y una rotación de 180°?
6. ¿Qué sucede con los trazos de una figura en la simetría axial?
7. ¿Cómo afecta el sentido de la figura en la simetría axial?
8. ¿Cuál es el simétrico de un punto A(x, y) con respecto al origen O(0, 0)?
9. ¿A qué se puede asimilar la simetría axial?
10. ¿Cuál es la diferencia entre simetría central y simetría axial?
11. ¿Cómo se relaciona la simetría central con el centro de simetría?
12. ¿Cuál es la importancia de que los puntos inicial, imagen y centro de simetría sean colineales en la simetría central?
13. ¿Qué ocurre con la forma de una figura en la simetría central?
14. ¿Cuál es la relación entre la simetría axial y la recta de simetría?
15. ¿Cómo se construye el segmento que une a un punto con su imagen en la simetría axial?
16. ¿Cuál es la diferencia entre la simetría axial y una traslación en el plano?
17. ¿Qué sucede con la longitud de los segmentos en la simetría axial?
18. ¿Cómo se puede identificar si una figura tiene simetría central o simetría axial?
19. ¿Cuáles son las aplicaciones de la simetría en el plano en el mundo real?

1.1 Simetría axial

Dada una recta fija L del plano, se llama simetría axial con respecto a L o reflexión respecto a L, a aquella isometría tal que, si P y P' son puntos homólogos con respecto a la recta L, entonces $\overline{PP'} \perp L$ y además, el punto medio de $\overline{PP'}$ pertenece a L.



Importante:

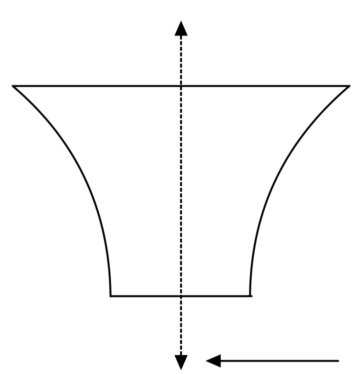
- Es una simetría axial, las figuras cambian de sentido respecto del giro de las manecillas del reloj.
- No es posible superponer, mediante traslaciones y/o rotaciones, los triángulos congruentes PQR y $P'Q'R'$.
- Los puntos de la recta L permanecen invariantes ante esta reflexión.
- Todo punto del plano cartesiano $A(x, -y)$ con respecto al eje de las abscisas y un simétrico $A''(-x, y)$ con respecto al eje de las ordenadas.

1.2 Eje de simetría

Es aquella recta que divide a una figura en dos partes simétricas con respecto a la recta.

Importante:

- Existen figuras que no tienen eje de simetría.
- Existen figuras que tienen sólo un eje de simetría.
- Existen figuras que tienen más de un eje de simetría.
- La circunferencia tiene infinitos ejes de simetría.
- Los polígonos regulares tiene tantos ejes de simetría como lados.



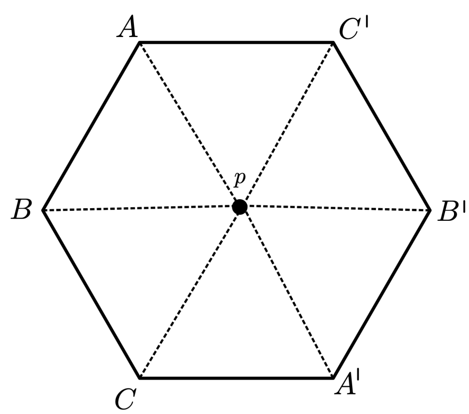
Eje de simetría

1.3 Centro de simetría

Sea P el centro de simetría de una figura entonces cada punto de la figura tiene su respectivo simétrico con respecto a P en ella misma.

Importante:

- Si una figura tiene un punto que es centro de simetría, dicho punto es único.
- La distancia desde un punto de la figura al centro de simetría es la misma distancia desde el centro de simetría a su punto homólogo.
- Al aplicar una rotaci´n de 180° centrada en el centro de simetría, cada punto de la figura tiene su punto homólogo en la misma figura.
- No todas las figuras tienen centro de simetría.
- En una circunferencia el centro de simetría es el centro de la circunferencia.
- Todos los paralelogramos tienen centro de simetría, el cual corresponde al punto de intersección de sus diagonales.
- Todo polígono regular de un número par de lados, tiene centro de simetría.
- Todo polígono regular de un número impar de lados, no tiene centro de simetría.



Ejemplo: Hexágono regular

Ejercicios 2

1. ¿Qué es la simetría axial y cuál es su relación con una recta fija L en un plano?
2. ¿Qué significa que los puntos P y P' sean homólogos con respecto a una recta L en la simetría axial?
3. ¿Cómo cambian las figuras con respecto al giro de las manecillas del reloj en la simetría axial?

4 ¿Por qué no es posible superponer mediante traslaciones y/o rotaciones los triángulos congruentes PQR y P'Q'R' en una simetría axial?

5. ¿Qué sucede con los puntos en la recta L durante una reflexión en la simetría axial?
6. ¿Cómo cambia un punto A(x,-y) con respecto al eje de las abscisas en la simetría axial?
7. ¿Qué es un eje de simetría y cómo se relaciona con una figura geométrica?
8. ¿Es posible que una figura no tenga un eje de simetría? ¿Puedes dar un ejemplo?
9. ¿Cómo se relaciona el número de lados de un polígono regular con su número de ejes de simetría?
10. ¿Por qué la circunferencia tiene infinitos ejes de simetría?

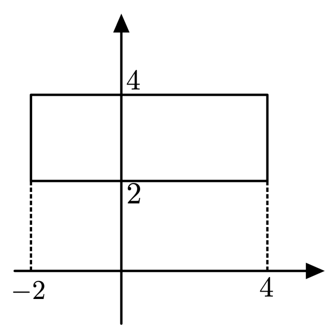
14. Al punto (1,4) se le aplica una traslación, obteniendo el punto (-6, 3). Entonces el vector de traslación es aplicado es

A) (-1, 7)
B) (-7, -1)
C) (-7, 1)
D) (-7, 7)
E) (1, 7)

15. ¿Cuál es el resultado de la rotación de 180° alrededor del origen del punto (3,7)?

A) (-3,7)
B) (3,-7)
C) (-3,-7)
D) (7,-3)

16. Al hacer rotar el rectángulo de la figura adjunta en torno al origen en sentido anti horario en 90°, las nuevas coordenadas del punto intersección de las diagonales será

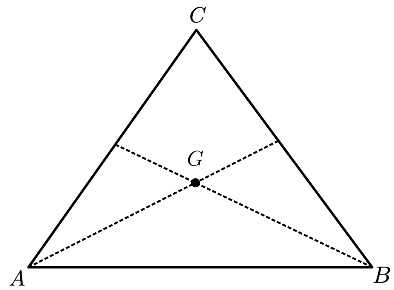


A) (1,3)
B) (3,1)
C) (-3,-1)
D) (-3,1)

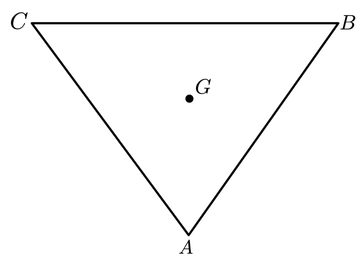
17. Al rotar el punto (2,3) en 90° en sentido positivo, respecto al punto (1,1) se obtiene el punto:

A) (-3, 2)
B) (-1, 2)
C) -(2, 1)
D) (1, –2)

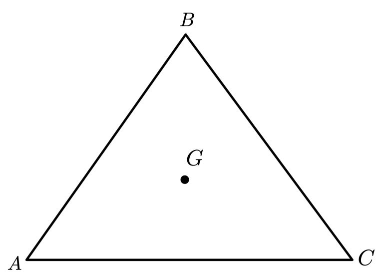
18. El ΔABC equilátero de la figura adjunta se hace rotar 60° en sentido anti horario, en torno al centro de gravedad. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ubicación del triángulo luego de realizada la transformación?



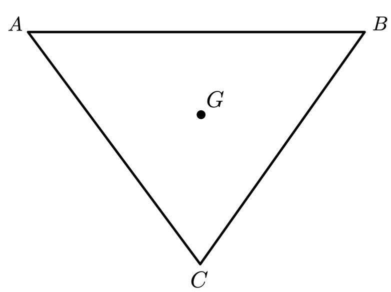
A)



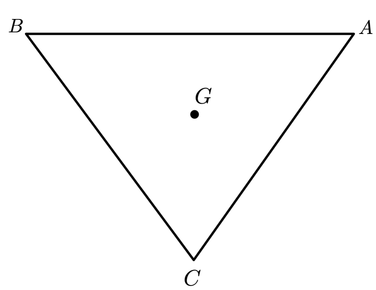
B)



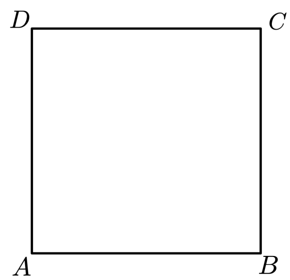
C)



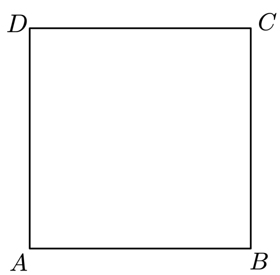
D)



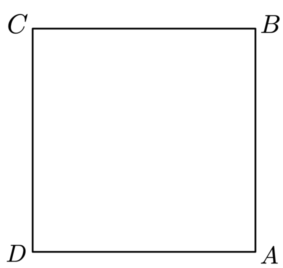
19. Al cuadrado ABCD de la figura adjunta, se le aplica una rotación de 45° en sentido horario y con centro en A, a continuación se aplica otra rotación, teniendo el mismo centro, de magnitud 135°, pero esta vez en sentido anti horario ¿cuál de las siguientes opciones representa la imagen del cuadrado luego de éstas transformaciones?.



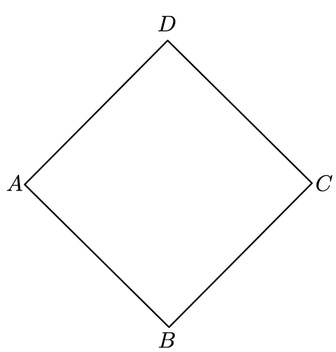
A)



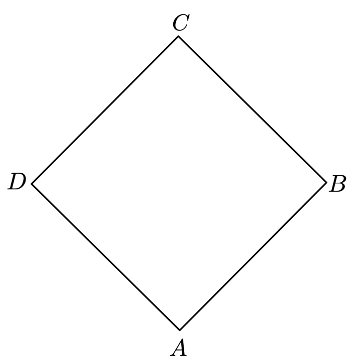
B)



C)



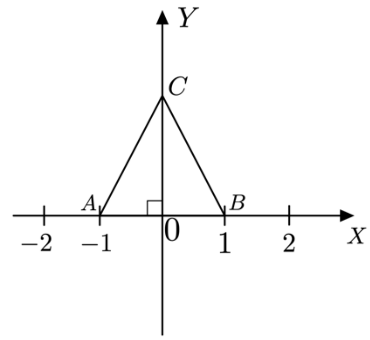
D)



20. Si se aplica una reflexión respecto al eje Y al punto (-5, 6), ¿cuál será el nuevo punto?

A) (5, -6)
B) (-5, -6)
C) (5, 6)
D) (-5, -6)

21. Luego de aplicar la rotación R(0,-90°) al triángulo equilátero ABC de la figura adjunta, se transforma en el ΔA'B'C', cuyo vértice C' tiene coordenadas



A) $(\sqrt{3}, 0)$
B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$
C) $(0, \sqrt{3})$
D) (2, 0)

22. Si a un punto situado en el semejante X positivo, se le aplica una simetría respecto al eje Y, luego una traslación por el vector (1, 0), nuevamente una simetría, pero esta vez con respecto al eje X y finalmente una rotación en 180° el punto imagen se encuentra en

A) En el semieje X positivo
B) En el semieje X negativo
C) En el semieje Y positivo
D) No se puede saber

23. Dado el punto R de coordenadas (5, -5), ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico de R respecto al origen?

A) (5, -5)
B) (-5, -5)
C) (-5, 5)
D) (-5, -1)

24. Si al punto (2, 4) se le aplica una rotación de 90° con respecto al origen, el nuevo punto es

A) (-4, 2)
B) (4, -2)
(2, -4)
C) (2, 4)

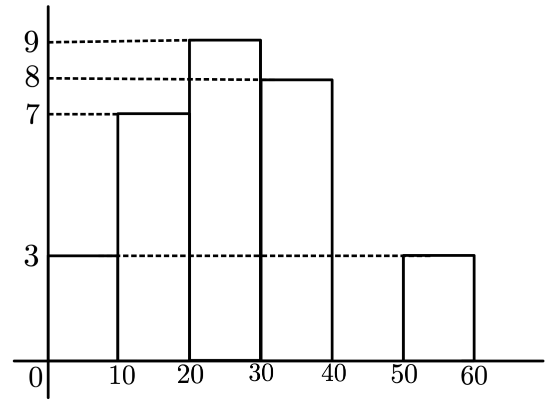
Respuestas de ejercicios de alternativas 1

Número	Respuesta
1	D
2	C
3	D
4	D
5	C
6	D
7	A
8	B
9	B
10	D
11	D
12	C
13	C
14	B
15	C
16	D
17	B
18	A
19	B
20	C
21	A
22	D
23	C
24	A
25	D
26	B
27	C
28	A
29	C
30	B

ESTADÍSTICA

CAPÍTULO 20

Entonces su gráfico de barras o histograma será

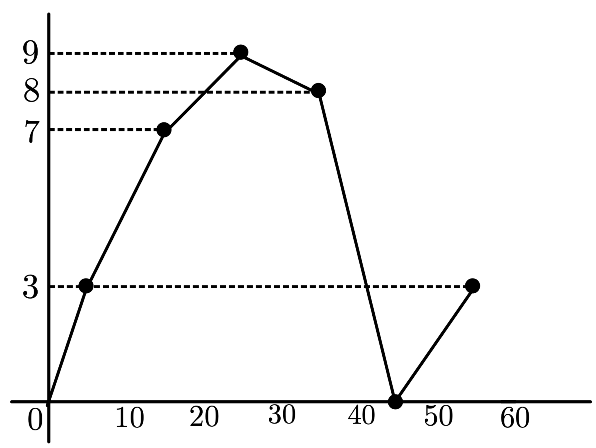


• **Polígono de frecuencia**

Un polígono de frecuencias es un gráfico de línea que muestra la frecuencia de cada intervalo en un conjunto de datos. Los intervalos se representan a lo largo del eje X, y las frecuencias a lo largo del eje Y. Se dibuja una línea que conecta los puntos representados por la frecuencia de cada intervalo. Puedes convertir el histograma de las alturas de los estudiantes en un polígono de frecuencias simplemente conectando los puntos superiores de cada barra con una línea.

Ejemplo 6

Usaremos la misma tabla de frecuencias del ejemplo anterior, y obtendremos el siguiente polígono de frecuencia,



• **Gráfico circular**

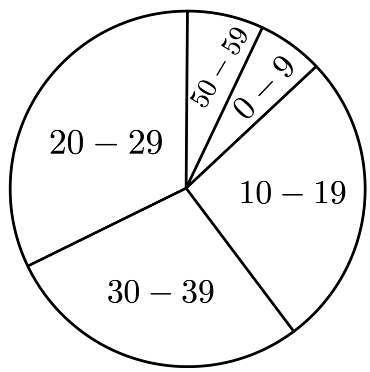
A diferencia de los anteriores, este no utiliza la frecuencia absoluta si no que la frecuencia relativa, asociando la porción de un disco circular correspondiente a su frecuencia relativa

Ejemplo 7

Tomemos la tabla de frecuencia anterior y agreguemos la frecuencia relativa

Tiempo de atraso	Frecuencia	Frecuencia relativa
0-9	3	$\frac{1}{10}$
10-19	7	$\frac{7}{30}$
20-29	9	$\frac{3}{10}$
30-39	8	$\frac{4}{15}$
40-49	0	0
50-59	3	$\frac{1}{10}$
Total	30	1

Por lo tanto, el gráfico circular resultante se ve como



2. Medidas de posición o tendencia central

Las medidas de posición, también conocidas como medidas de tendencia central, son estadísticas que nos indican dónde se sitúa el "centro" de un conjunto de datos. Las tres medidas de tendencia central más comunes son la media aritmética, la mediana y la moda.

2.1 Media Aritmética

La media aritmética, a la que a menudo nos referimos simplemente como "promedio", se calcula sumando todos los datos y dividiendo por la cantidad total de datos.

Por ejemplo, si tienes las calificaciones de un estudiante en cuatro exámenes: 80, 85, 90 y 95, la media aritmética sería (80+85+90+95)/4 = 87.5. Esto indica que, en promedio, el estudiante obtuvo 87.5 en sus exámenes.

2.2 Mediana

La mediana es el valor que divide un conjunto de datos en dos partes iguales cuando los datos están ordenados de manera ascendente o descendente. La mediana es especialmente útil porque no se ve afectada por valores extremos o "outliers".

Por ejemplo, si tienes las edades de un grupo de personas: 15, 20, 25, 30, y 90 años, la mediana sería 25, ya que hay dos edades menores y dos mayores a 25. Aunque 90 es mucho mayor que las otras edades, no afecta el valor de la mediana.

2.3 Moda

La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos. Un conjunto de datos puede tener una moda (unimodal), más de una moda (bimodal o multimodal), o ninguna moda (amodal).

Por ejemplo, si tienes las calificaciones de un estudiante en varios exámenes: 85, 85, 90, 90, 90, y 95, la moda sería 90, ya que es la calificación que aparece con mayor frecuencia.

Estas tres medidas de tendencia central son herramientas esenciales en estadística, ya que nos permiten obtener una visión rápida y sencilla del "centro" de un conjunto de datos. Sin embargo, es importante recordar que cada medida tiene sus propias fortalezas y debilidades, y es útil considerar todas ellas al analizar un conjunto de datos.

Ejemplo 8

Supón que un estudiante ha obtenido las siguientes calificaciones en sus exámenes: 70, 75, 80, 85 y 90.

Media Aritmética: (70+75+80+85+90) / 5 = 80

Mediana: El tercer número en la lista ordenada es 80, por lo tanto, la mediana es 80.

Moda: Ningún número se repite, por lo tanto, este conjunto de datos es amodal.

Ejemplo 9

Supón que tienes un grupo de 6 personas con las siguientes edades: 15, 20, 25, 25, 30, 35.

Media Aritmética: (15+20+25+25+30+35) / 6 = 25

Mediana: La media de los dos números medios en la lista ordenada es (25+25) / 2 = 25.

Moda: El número que se repite con mayor frecuencia es 25, por lo tanto, la moda es 25.

Ejemplo 10

Supón que tienes el número de ventas realizadas en una tienda durante 7 días: 10, 20, 20, 30, 30, 30 y 40.

Media Aritmética: (10+20+20+30+30+30+40) / 7 = 25.71 (aproximadamente)

Mediana: El número medio en la lista ordenada es 30, por lo tanto, la mediana es 30.

Moda: El número que se repite con mayor frecuencia es 30, por lo tanto, la moda es 30.

3. Medidas de Tendencia Central para Datos en Tablas de Frecuencia sin Intervalos

Las tablas de frecuencia son una forma de organizar datos que permite identificar rápidamente cuántas veces se repite un dato específico en el conjunto total. Estas tablas son de gran ayuda cuando se trata de calcular las medidas de tendencia central —la media, la mediana y la moda— para datos no agrupados en intervalos.

3.1 Media en una Tabla de Frecuencia

Para calcular la media a partir de una tabla de frecuencia, primero debemos multiplicar cada valor de los datos por su frecuencia correspondiente, sumar todos estos productos y finalmente dividir por la suma de las frecuencias.

Por ejemplo, considera la siguiente tabla de frecuencias que representa las calificaciones de un estudiante en varios exámenes:

Calificación	Frecuencia
70	2
80	3
90	1
100	1

La media sería:

$$((70 \cdot 2) + (80 \cdot 3) + (90 \cdot 1) + (100 \cdot 1)) / (2+3+1+1) = 80$$

Esto indica que la calificación promedio del estudiante es 80.

3.2 Mediana en una Tabla de Frecuencia

La mediana se encuentra en el valor que está en el medio de los datos cuando están ordenados de menor a mayor. En una tabla de frecuencia, debemos considerar la frecuencia de cada valor. Si el número total de datos es par, la mediana es el promedio de los dos valores medios.

Con nuestra tabla de frecuencias, tenemos 7 datos en total. El cuarto valor es la mediana, que corresponde a una calificación de 80.

3.3 Moda en una Tabla de Frecuencia

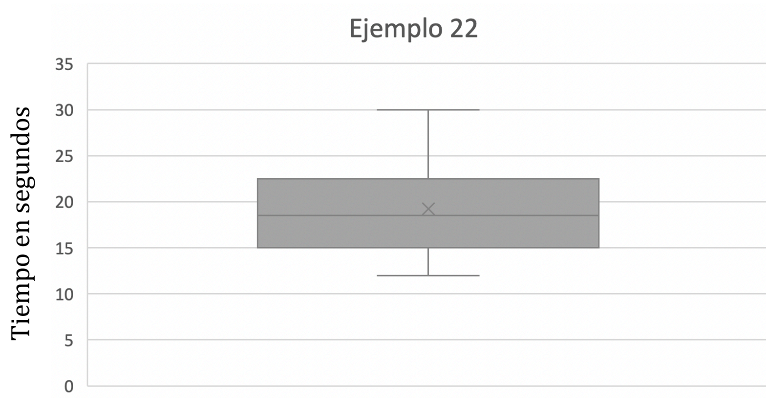
La moda es el valor que tiene la mayor frecuencia en la tabla de frecuencias.

En nuestra tabla de frecuencias, la moda es 80, ya que es la calificación con la mayor frecuencia (3).

Las medidas de tendencia central nos dan una visión general de los datos y nos ayudan a entender su comportamiento. Sin embargo, es importante recordar que no proporcionan información sobre la variabilidad o la dispersión de los datos.

Consideremos un conjunto de datos que representan las calificaciones obtenidas por los estudiantes en un examen de matemáticas. Las calificaciones y su frecuencia se presentan en la siguiente tabla:

Calificación	**Frecuencia**
85	3
90	5
95	4
100	2



Recuerda, estos diagramas son muy útiles para comparar distribuciones de diferentes conjuntos de datos, ya que permiten visualizar y comparar fácilmente varios aspectos estadísticos al mismo tiempo.

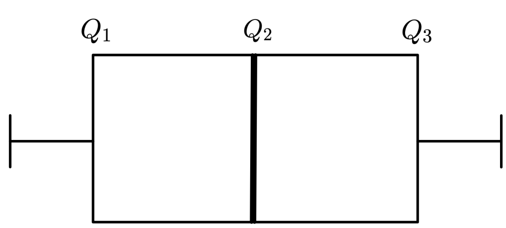
7. Tipos de muestra

7.1 Muestra simétrica

Para comprender lo que significa una muestra simétrica, primero necesitamos entender qué es la simetría en el contexto de las estadísticas. Imagina una línea que atraviesa el centro de una imagen; si ambos lados de la imagen son exactamente iguales, entonces diríamos que la imagen es simétrica. De manera similar, en estadísticas, si los datos en una muestra se distribuyen de manera que hay igual cantidad y tipos de datos a cada lado del valor central o medio, se llama distribución simétrica o, en el caso de que nos referimos a los datos recopilados, una "muestra simétrica".

Visualmente, una distribución simétrica parece una campana, a la que se le llama a veces "curva de campana" o distribución normal. En este tipo de distribución, la media, la mediana y la moda (es decir, el valor más común en los datos) son todos iguales, y la distribución de los datos a cada lado de la media es la misma.

En cuanto a por qué los valores intercuantílicos están igualmente dispersos en una distribución simétrica, podemos pensar en los cuantiles (o percentiles, deciles, cuartiles) como puntos que dividen los datos en partes iguales. En una distribución simétrica, la media está exactamente en el medio, lo que significa que la mitad de los datos son mayores que la media y la otra mitad son menores. Si tomamos el primer cuartil (Q1), que divide el 25% inferior de los datos, y el tercer cuartil (Q3), que divide el 25% superior, encontraríamos que están equidistantes de la media en una distribución simétrica. Esto se debe a la naturaleza simétrica de los datos: hay la misma cantidad de datos en cada lado de la media, y están distribuidos de la misma manera.



Ejemplo 22

Imagina que recopilamos datos sobre las calificaciones de un grupo de 20 estudiantes en una prueba de matemáticas. Las calificaciones son: 55, 60, 65, 65, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 80, 80, 80, 85, 85, 90, 90, 95, 100. Esta distribución de calificaciones es simétrica. La media, mediana y moda de estos datos son 75. Si trazamos un histograma de estos datos, veremos que se asemeja a la forma de una campana.

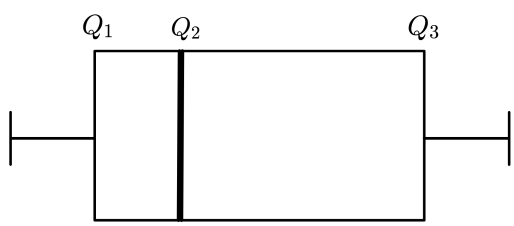
En términos de cuantiles, el primer cuartil (Q1) es 70, la mediana (o segundo cuartil, Q2) es 75, y el tercer cuartil (Q3) es 85. Como puedes ver, Q1 y Q3 están equidistantes de la mediana, lo que refleja la naturaleza simétrica de los datos.

7.2 Muestra positivamente asimétrica

Las distribuciones o muestras asimétricas, también conocidas como distribuciones sesgadas, son aquellas donde los datos no están distribuidos uniformemente alrededor de la media. En una muestra positivamente asimétrica (o con sesgo positivo), hay una mayor concentración de datos en el lado izquierdo de la distribución y la "cola" de la distribución se extiende hacia el lado derecho. Esto significa que hay más datos que son menores que la media y menos datos que son mucho mayores que la media.

En una muestra positivamente asimétrica, la media es siempre mayor que la mediana y la mediana es siempre mayor que la moda. Esto se debe a que la cola larga de la distribución, que contiene valores mayores, empuja la media hacia la derecha.

En lo que respecta a los valores intercuantílicos, no estarán igualmente dispersos como en una distribución simétrica. En una distribución con sesgo positivo, el tercer cuartil (Q3) estará más alejado de la mediana que el primer cuartil (Q1). Esto se debe a que hay menos datos en el extremo superior de la distribución, por lo que los valores tienden a estar más dispersos en ese rango.



Ejemplo 23

Imagina que tienes un grupo de 20 tiendas y recoges datos sobre las ventas que realiza cada una en un mes determinado. Las ventas, en miles de dólares, son las siguientes: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 500. Esta distribución de las ventas es positivamente asimétrica.

En este caso, si calculamos, la moda sería 10 (el valor que más se repite), la mediana sería 105 (el punto medio de los datos), y la media sería aproximadamente 118. Aquí puedes ver que la media es mayor que la mediana, y la mediana es mayor que la moda, lo cual es característico de una distribución con sesgo positivo.

En términos de cuartiles, Q1 (el primer cuartil que cubre el 25% inferior de los datos) podría ser 52.5, y Q3 (el tercer cuartil que cubre el 25% superior de los datos) podría ser 162.5. Puedes notar que la distancia entre Q1 y la mediana es menor que la distancia entre Q3 y la mediana, reflejando la asimetría positiva de la distribución.

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo II y III

D) I, II y III

17. Una serie de camisas de iguales características valen \$5.000, \$8.000, \$10.000, \$10.000 y \$15.000. Dados estos datos, ¿Cuál(es) de las siguientes características es(son) verdadera(s)?

I. La moda es \$10.000

II. La mediana es \$10.000

III. La media es \$9.600

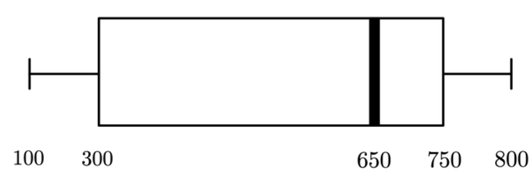
A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) I, II y III

18. La distribución de pensiones en miles de pesos que recibe un grupo de adultos mayores se representa en la figura adjunta mediante el siguiente diagrama de caja y bigotes. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?



I) El primer cuartil es \$ 300.000.

II) El promedio de las pensiones es \$ 650.000.

III) El 25% de las personas del grupo gana a lo menos \$ 300.000.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

19. Si el número de preguntas contestadas en un examen por 10 alumnos fue: 60, 62, 61, 63, 66, 60, 62, 61, 62, 62, ¿cual(es) de las afirmaciones siguientes es (son) verdadera(s)?

I) La mediana es 62.

II) El promedio (media) es 62.

III) La moda coincide con el promedio.

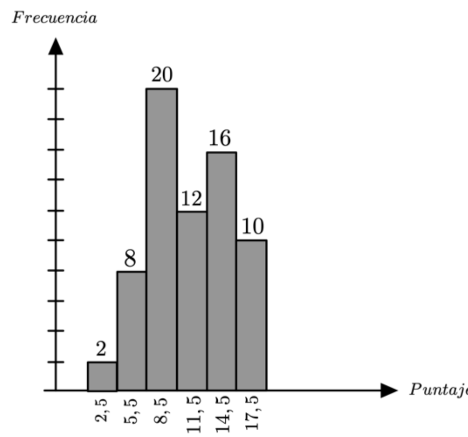
A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) I, II y III

20. El histograma de la figura adjunta, muestra una distribución de frecuencias con respecto a los puntajes obtenidos en un Test por un grupo de alumnos, donde los intervalos son de la forma [a, b[. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) La amplitud de cada intervalo es 3.

II) El intervalo donde se ubica la mediana es [11,5 – 14,5[.

III) El intervalo modal es [8,5 – 11,5[.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y III

D) I, II y III

21. La tabla muestra la distribucion de 100 datos, ¿cuál(es) de las afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El primer cuartil está en el segundo intervalo.

II) El séptimo decil está en el intervalo [35,40[.

III) La mediana está en el intervalo modal.

Intervalo	Frecuencia
[20,25[	16
[25,30[	21
[30,35[	18
[35,40[	22
[40,45[	15
[45,50[	8

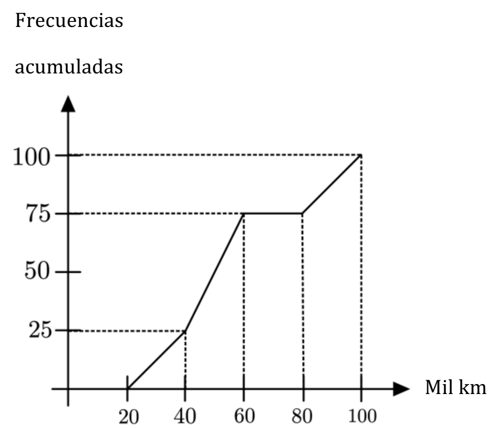
A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y III

D) Solo I y II

22. El departamento de control de calidad de una empresa que fabrica neumáticos registró en una tabla de datos los kilómetros de duración de una serie de estos, generando el siguiente grafico, donde los intervalos son de la forma [a, b[y el ultimo de la forma [c, d]. De acuerdo a él se puede deducir que



I) se testearon 200 neumáticos.

II) el intervalo [40 - 60[es el intervalo modal.

III) la mayor cantidad de neumáticos duró entre 60 y 80 mil kilómetros.

Es (son) verdadera(s)

A) solo I.

B) solo II.

C) solo III.

D) solo I y II.

23. Dados los puntajes obtenidos por 5 personas en un ensayo de ciencias: 810, 765, 655, 555 y 605, ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. No existe moda

II. La media es 678

III. La mediana es 605

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) I, II y III

24. El promedio (media aritmética) de las masas de 4 personas es 65 kilos. Si la suma de las primeras 3 personas es 200 kilos, ¿cuál es la masa de la última persona?

A) 69 kilos

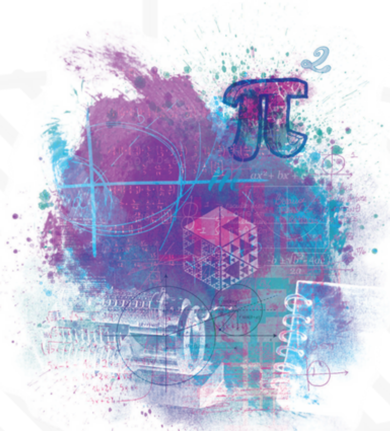
PSU LIBROS

PREPARATE A TU RITMO

MATEMÁTICA

PSU LIBROS

PREPARATE A TU RITMO



MATEMÁTICA